Développement: théorème de Perron-Frobenius

Définition 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est dite *positive* (resp. *strictement positive*) et on note $A \geq 0$ (resp. $A > 0$) lorsque tous ses coefficients sont positifs (resp. strictement positifs). On définit de même un vecteur positif ou strictement positif.

Proposition 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A est strictement positive si et seulement si :

$$\forall x \geq 0 \text{ non nul }, Ax > 0.$$

Cette propriété donne une interprétation géométrique des matrices strictement positives : ce sont celles qui préservent le cône $\{x > 0\}$ invariant. Le théorème suivant assure que dans ce cône, il y a une direction qui va être laissée invariante par A.

Théorème 2. (de Perron-Frobenius)
Soit A une matrice réelle strictement positive. Alors le rayon spectral de A est l'unique valeur propre de A de module $\rho(A)$. De plus, le sous espace propre associé est de dimension 1, engendré par un vecteur strictement positif.

Démonstration. On assouplit légèrement le problème. Au lieu d'étudier directement le spectre de A, on s'intéresse à l'ensemble :

$$\mathcal{E} = \{t \in \mathbb{R}, \exists x \geq 0 \text{ non nul }, Ax - tx \geq 0\}.$$

Cet ensemble est non vide car il contient 0. On va montrer qu'il est égal à $[0, \rho(A)]$.

Tout d'abord, on vérifie que $\mathcal{E}$ n'est pas $\{0\}$. Pour cela, on considère $u = (1, \ldots, 1) > 0$ et on calcule :

$$[Au - tu]_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} - t = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} - nt$$

pour $t > 0$. On voit alors que puisque $A > 0$, la somme en question est strictement positive, et donc que pour t suffisamment petit, le vecteur $Au - tu$ est positif.

Montrons alors que $\mathcal{E}$ est convexe. Soient $0 < t' < t \in \mathcal{E}$. Pour x tel que $Ax - tx \geq 0$, on a :

$$Ax - t'x = Ax - tx + (t - t')x \geq 0,$$

ce qui conclut.

Maintenant, on vérifie que $\mathcal{E}$ est borné en voyant que $Ax \geq tx$ implique $t \leq \|A\|$ pour toute norme matricielle.

Enfin, on montre que $\mathcal{E}$ est fermé. Soit (t_k) une suite d'éléments de $\mathcal{E}$ qui converge vers t, et (x_k) une suite de vecteurs positifs non nuls telle que $Ax_k - t_k x_k \geq 0$. On peut supposer la suite (x_k) normalisée convergente quitte à extraire. Dès lors, on a, si x est la limite de (x_k), alors

$$Ax - tx \geq 0$$

et x est positif est non nul puisque $\{x \geq 0\}$ est fermé, donc $t \in \mathcal{E}$. $\mathcal{E}$ est donc de la forme $[0, \rho]$. Soit $x \geq 0$ non nul tel que $y = Ax - \rho x \geq 0$. Si y est non nul, on peut trouver un $\varepsilon > 0$ tel que $Ay - \varepsilon Ax > 0$. En effet, pour $1 \leq i \leq n$,

$$[Ay - \varepsilon Ax]_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(y_j - \varepsilon x_j),$$

qui tend vers une quantité strictement positive quand ε tend vers 0 pour toute valeur de i. Dès lors,

$$Ay - \rho y = A(Ax) - (\rho + \varepsilon)Ax$$

et Ax est positif non nul donc ceci contredit la maximalité de ρ. Nécessairement y est nul c'est-à-dire ρ est valeur propre de A pour le vecteur propre $x = \frac{Ax}{\rho} > 0$.

Soit z un vecteur propre complexe associé à une valeur propre λ. Par inégalité triangulaire, si $|.|$ désigne le vecteur du module des coefficients et si z est un vecteur propre de A :

$$A|z| - |Az| = A|z| - |\lambda||z| \geq 0$$

donc $|\lambda| \in \mathcal{E} = [0, \rho]$. Ainsi $\rho = \rho(A)$. En particulier, en appliquant ce qui précède pour $\lambda = \rho$ et z vecteur propre associé à ρ, on obtient $|Az| = A|z|$. Ceci correspond au cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire :

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, [|Az|]_k = [A|z|]_k \text{ i.e. } |\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} z_j| = \sum_{j=1}^{n} |a_{k,j} z_j|$$

Ainsi, pour tout k, il existe $\theta_k \in [0, 2\pi[$ tel que pour tout j, $|a_{k,j} z_j| = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k} a_{k,j} z_j$. Comme $A > 0$, on peut simplifier par $a_{k,j}$ et avoir l'existence de $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|z|$. Alors

$$\langle x, z \rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \langle x, |z| \rangle \neq 0.$$

Par existence d'un supplémentaire orthogonal en dimension finie, tout vecteur du sous-espace propre associé à ρ et orthogonal à x est nul. Nécessairement, $\ker(A - \rho I_n) = \mathrm{Vect}(x)$. Enfin, si λ est une valeur propre de A de module ρ, alors $|z|$ est vecteur propre associé à ρ et comme $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|z|$, alors z est colinéaire à x donc $\lambda = \rho$.

$\square$

Remarque 1. On peut appliquer le résultat à $A^\top$ et avoir l'existence d'un vecteur $v > 0$ propre de $A^\top$ associé à la valeur propre ρ. On a alors nécessairement $\langle x, v \rangle > 0$.

Application 1. Soit $A > 0$ et $X_0 \geq 0$. On s'intéresse au système dynamique $X_{t+1} = AX_t$ pour $t \in \mathbb{N}^*$. Lorsque t tend vers l'infini, on a l'asymptotique suivante :

$$X_t \sim \rho(A)^t \langle v, X_0 \rangle w$$

où $w = \frac{x}{\|x\|_1}$ et v comme ci-dessus choisi de telle sorte que $\langle v, w \rangle = 1$.

Démonstration. On considère la matrice de rang 1 $P = vw \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont l'image est $\mathrm{Vect}(w)$. Puisque $\langle v, w \rangle = 1$, on peut vérifier la matrice P est une matrice de projection qui commute avec A. On a donc une décomposition en sous-espaces stables de A :

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(P) \oplus \ker(P).$$

Dans cette décomposition, on a :

$$X_0 = PX_0 + (X_0 - PX_0) =: cw + \widetilde{x}$$

avec $c = \langle v, X_0 \rangle \geq 0$ et $\widetilde{x} \in \ker(P)$. On a alors pour tout $t \in \mathbb{N}$:

$$\frac{A^t}{\rho(A)^t} X_0 = cw + B^t \widetilde{x},$$

avec B^t la restriction de $\frac{A}{\rho(A)}$ à $\ker(P)$. B n'a que des valeurs propres de modules strictement inférieurs à 1 donc la suite de ses puissances tend vers 0. Ainsi :

$$\frac{A^t}{\rho(A)^t} X_0 = \frac{1}{\rho(A)^t} X_t \xrightarrow{t \to \infty} cw = \langle v, X_0 \rangle w.$$

On a donc bien le résultat voulu. $\square$

Référence : La preuve de Perron-Frobenius provient du sujet Analyse et Probabilités de l'agrégation externe de 2012. L'asymptotique provient de moi il me semble.