

# Développement: Quaternions et matrices orthogonales

Arthur Maritch-Roy

On veut ici généraliser à la dimension trois l'homéomorphisme  $\text{SO}_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{U}$ . Cela va se faire par le biais des quaternions.

**Théorème 1.** (définition des quaternions)

Il existe une algèbre  $\mathbb{H}$  de dimension 4 sur  $\mathbb{R}$  telle que 1 soit le neutre pour la multiplication, et telle que l'on ait une base  $(1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  telle que

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{k} = -1.$$

**Remarque 1.** Il y a deux manières usuelles de réaliser  $\mathbb{H}$  : d'une part dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  avec

$$I = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix},$$

et d'autre part dans  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  en identifiant  $\mathbb{C}$  à  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  par  $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Définition 1.** Soit  $q \in \mathbb{H}, q = a + \mathbf{i}b + \mathbf{j}c + \mathbf{k}d, (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ . On définit la conjugaison par

$$\bar{q} = a - \mathbf{i}b - \mathbf{j}c - \mathbf{k}d$$

et la norme par  $N(q) = q\bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ .

**Proposition 2.**  $N$  est une forme quadratique euclidienne sur  $\mathbb{H}$ , de forme polaire :

$$\varphi(q_1, q_2) = \frac{1}{2}(q_1\bar{q}_2 + q_2\bar{q}_1).$$

L'ensemble  $P$  est quaternions purs est orthogonal à  $\mathbb{R}$  pour ce produit scalaire.

**Théorème 3.** L'ensemble  $\mathbb{H}$  des quaternions forme un corps non commutatif. Le centre de  $(\mathbb{H}^*, \times)$  est égal à  $\mathbb{R}$ , et  $N$  réalise un homomorphisme de  $\mathbb{H}^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ .

On note  $G = \ker(N) = \{q \in \mathbb{H}, N(q) = 1\}$ .

**Théorème 4.** On a l'isomorphisme suivant :

$$G/\{-1, 1\} \simeq \text{SO}_3(\mathbb{R}).$$

**Démonstration.** Comme le corps  $\mathbb{H}$  n'est pas commutatif, l'action de  $\mathbb{H}^*$  sur  $\mathbb{H}$  est non triviale. On pose donc :

$$S_q : q' \mapsto qq'q^{-1}.$$

En fait, on ne perd rien en faisant opérer  $G$  puisqu'une éventuelle constante disparaîtrait, et on a alors  $q^{-1} = \bar{q}$ . L'application  $S_q$  est clairement  $\mathbb{R}$ -linéaire et bijective, et  $S : q \mapsto S_q$  est un morphisme de groupes, de noyau  $Z(\mathbb{H}) \cup G = \{-1, 1\}$ .

Ensuite, on voit que  $S_q$  est une isométrie pour  $N$ . On remarque alors que  $S_q$  restreinte à  $\mathbb{R}$  est l'identité, et donc comme  $P$  est l'orthogonal de  $\mathbb{R}$  pour  $N$ ,  $S_q$  stabilise  $P$  et on peut poser  $s_q$  la

restriction de  $S_q$  à  $P$ . Alors,  $s : q \mapsto s_q$  est un morphisme de  $G$  sur  $O(N) \simeq O_3(\mathbb{R})$  de noyau  $\{-1, 1\}$ . L'application  $s$  est alors continue, puisque les coefficients de  $s_q$  dans la base  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  sont des polynômes homogènes de degré 2 en les coefficients de  $q$  dans la base  $(1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ . Donc  $\det \circ s$  est continue de  $G$  dans  $\{-1, 1\}$ . Par connexité de  $G$  (identifiable à la sphère dans  $\mathbb{R}^4$ ), on peut définir  $s : q \mapsto \text{SO}_3(\mathbb{R})$ .

Montrons enfin que  $s$  est surjective. Soit  $p \in P \cup G$ , alors  $s_p(p) = p$ , donc  $s_p$  fixe  $\mathbb{R}.p$ , c'est donc une rotation d'axe  $\mathbb{R}.p$ . Mais puisque  $p$  est dans  $P \cup G$ ,  $p^2 = -1$  donc  $s_p^2 = \text{id}$  donc c'est le renversement d'axe  $p$ . On a donc tous les renversements, qui engendrent  $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ , donc on a bien la surjectivité, puis le résultat voulu en passant au quotient.  $\square$

**Corollaire 5.** En plongeant  $\mathbb{H}$  dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , on a :

$$G \simeq \text{SU}_2(\mathbb{C})$$

donc  $\text{PSU}_2(\mathbb{C}) \simeq \text{SO}_3(\mathbb{R})$ .

**Référence :** Daniel Perrin, *Cours d'algèbre*.