Développement: Convergence de séries de variables aléatoires

Arthur Maritch-Roy

Dans tout le document, on s'intéresse à des séries de la forme $\sum_n X_n$, où les (X_i) sont des variables aléatoires indépendantes et L^2. On définit par (S_n) la suite des sommes partielles, et on note $\sigma_i^2 = \mathrm{Var}(X_i)$. On garde ces notations dans tout le document.

Théorème 1. (inégalité maximale de Kolmogorov) : On suppose les (X_i) centrées. Alors pour $\varepsilon > 0$ et pour tout n :

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\le k\le n} |S_k| \ge \varepsilon\right) \le \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2.$$

Démonstration. Soit $M_n = \max_{1\le k\le n} |S_k|$ pour tout n. On souhaite majorer $\mathbb{P}(M_n \ge \varepsilon)$, on définit E comme l'événement en question. On suppose E non vide, et on va le partitionner selon le premier k pour lequel on va dépasser ε :

$$E_k := (|S_k| \ge \varepsilon) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} (|S_i| < \varepsilon)\right),$$

pour avoir ainsi $\mathbb{P}(E) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(E_k)$. Sur E_k, $|S_k|$ est par définition supérieure à ε donc

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_{E_k} S_k^2) \ge \varepsilon^2\,\mathbb{P}(E_k)$$

ce que l'on peut réécrire

$$\mathbb{P}(E) \le \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{E_k} S_k^2).$$

Or en développant le carré dans $\mathbb{E}(\mathbf{1}_{E_k} S_n^2)$ à partir du k-ième terme, on montre que le double produit s'annule par indépendance et centrage et donc que $\mathbb{E}(\mathbf{1}_{E_k} S_n^2) \ge \mathbb{E}(\mathbf{1}_{E_k} S_k^2)$ pour $1 \le k \le n$. Finalement, on a :

$$\mathbb{P}(E) \le \frac{1}{\varepsilon^2}\,\mathbb{E}(\mathbf{1}_E S_n^2) \le \frac{1}{\varepsilon^2}\,\mathbb{E}(S_n^2),$$

et on conclut par indépendance. □

Proposition 2. Si les (X_i) sont centrées, et si la série des variances converge, alors la série $\sum_n X_n$ converge presque sûrement (et dans L^2).

Démonstration. Pour la convergence dans L^2, on montre que la suite des sommes partielles est de Cauchy (pour la norme 2), ce qui est direct au vu des hypothèses.

Passons à la convergence presque sûre. Pour une suite (x_n) de réels, dont les sommes partielles sont notées (s_n), on sait que la série des (x_n) converge si et seulement si la suite (s_n) est de Cauchy, si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, |s_{N+k} - s_N| \le \varepsilon,$$

ce qui équivaut encore à

$$\inf_{N\in\mathbb{N}} \sup_{k\in\mathbb{N}} |s_{N+k} - s_N| = 0$$

On revient donc aux probabilités et on pose A_m la variable aléatoire $\sup_{k\in\mathbb{N}} |S_{m+k} - S_m|$ ainsi que $A = \inf_m A_m$. On cherche donc à calculer $\mathbb{P}(A = 0)$. Soit donc $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(A_m > \varepsilon\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{1\leq k\leq n} |S_{m+k} - S_m| > \varepsilon\right).$$

Mais d'après l'inégalité de Kolmogorov

$$\mathbb{P}\left(\sup_{1\leq k\leq n} |S_{m+k} - S_m| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{j=m+1}^{m+n} \sigma_j^2,$$

donc

$$\mathbb{P}\left(A_m > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{j=m+1}^{\infty} \sigma_j^2.$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(A > \varepsilon) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} (A_m > \varepsilon)\right) \leq \inf_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left(A_m > \varepsilon\right) = 0$$

car la série des variances converge. On a donc $\mathbb{P}(A > \varepsilon) = 0$ pour tout ε, donc $A = 0$ presque sûrement, donc la série converge presque sûrement. □

Théorème 3. (loi des grands nombres avec un moment d'ordre deux)
Si $\mathbb{E}(X_n)$ tend vers m et si $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\sigma_j^2}{j^2} < \infty$ alors $\overline{X_n}$ converge presque sûrement et dans L^2 vers m.

Pour prouver ce résultat, on aura besoin du lemme de Cesàro ainsi que d'un autre lemme sur les suites.

Lemme. (de Kronecker)
Soit (x_n) une suite dont la série associée est convergente, et (b_n) une suite croissante de réels qui tend vers l'infini. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} b_j x_j = 0.$$

Démonstration. Notons S la somme des (x_j). On pose $S_n = \sum_{j=1}^{n} x_j - S$, qui est une suite qui tend donc vers 0, avec $x_n = S_n - S_{n-1}$. Une transformation d'Abel donne alors :

$$\sum_{j=N}^{n} b_j x_j = \sum_{j=N}^{n} b_j(S_j - S_{j-1}) = S_n b_n - b_N S_{N-1} - \sum_{j=N}^{n-1} S_j(b_{j+1} - b_j).$$

Ainsi, dès que $b_n \neq 0$:

$$\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} b_j x_j = \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{N} b_j x_j - \frac{b_N S_{N-1}}{b_n} + S_n - \frac{1}{b_n} \left(\sum_{j=N}^{n-1} S_j(b_{j+1} - b_j)\right).$$

À N fixé, tout peut être rendu arbitrairement petit quand n est grand, ce qu'on voulait. □

Passons maintenant à la loi des grands nombres.

Démonstration. D'après le lemme de Cesàro, $\mathbb{E}(\overline{X_n})$ tend vers m quand n tend vers l'infini. Les variables aléatoires $Y_n := \frac{X_n - \mathbb{E}(X_n)}{n}$ sont donc indépendantes, centrées et de variance $\frac{1}{n^2}\sigma_n^2$, donc

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}\sigma_j^2 < \infty.$$

D'après notre théorème de convergence sur les séries de variables aléatoires, la série aléatoire de terme général Y_n converge presque sûrement. On peut alors appliquer le lemme de Kronecker à (Y_n) et $(b_n) = (n)$, qui donne que $(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} jY_j)$ converge presque sûrement vers 0. Ceci, en écrivant ce que vaut Y_n, prouve la convergence presque sûre de $(\overline{X_n})$ vers m.

Pour la convergence en norme 2, on voit que

$$\left\| \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \mathbb{E}(X_j)) \right\|^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2,$$

qui tend vers 0 par le lemme de Kronecker. Enfin, on écrit

$$\overline{X_n} - m = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \mathbb{E}(X_j)) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}(X_j) - m,$$

et on conclut par inégalité triangulaire. □