Développement: Espace de Sobolev et résolution de problèmes aux limites

Arthur Maritch-Roy

Dans ce document, on introduit l'espace de Sobolev H^1 dans l'optique de résoudre le problème de Dirichlet avec conditions aux bords nulles.

Définition 1. On définit, pour I un intervalle de $\mathbb{R}$ ouvert, l'*espace de Sobolev* $\mathrm{H}^1(I)$ par :

$$\mathrm{H}^1_0(I) = \left\{ u \in \mathrm{L}^2(I), \exists g \in \mathrm{L}^2(I), \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}^1_{\mathrm{c}}(I) \right\}.$$

Remarque 2. On peut aussi prendre comme espace de fonctions test $\mathcal{D}(I)$. De plus, le g de la définition peut être noté u', puisqu'il coïncide avec la vraie dérivée de u si u est $\mathcal{C}^1$ sur I. De plus, par densité des fonctions test, cette dérivée est unique.

Proposition 3. L'espace $\mathrm{H}^1(I)$ est préhilbertien pour le produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle = \langle u, v \rangle_{\mathrm{L}^2} + \langle u', v' \rangle_{\mathrm{L}^2}.$$

La norme associée est équivalente à la norme $\|x\|_{\mathrm{H}^1} = \|u\|_2 + \|u'\|_2$.

Proposition 4. C'est même un espace de Hilbert (séparable).

Démonstration. Soit (u_n) une suite de Cauchy $\mathrm{H}^1(I)$. Nécessairement, (u_n) et (u'_n) sont des suites de Cauchy dans L^2. Ainsi, elles convergent respectivement vers u et g des fonctions de L^2. Dès lors, en faisant tendre n vers l'infini dans la relation

$$\int_I u_n \varphi' = -\int_I u'_n \varphi,$$

on obtient

$$\int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I).$$

Ainsi, $u \in \mathrm{H}^1(I)$, $u' = g$ et $\|u_n - u\|_{\mathrm{H}^1}$ tend vers 0. □

Lemme 5. Soit $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(I)$ telle que $\int_I f\varphi' = 0 \forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$. Alors f est constante (presque partout).

Démonstration. Soit $\psi \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{c}}(I)$ telle que $\int_I \psi = 1$. Pour tout $w \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{c}}(I)$, il existe $\varphi \in \mathcal{C}^1_{\mathrm{c}}(I)$ telle que $\varphi' = w - (\int_I w)\psi$. En effet, $h := w - (\int_I w)\psi$ est continue à support compact inclus dans I. Puisque son intégrale sur I est nulle, elle admet une primitive à support compact. Ainsi, on peut réécrire notre relation sur f comme :

$$\forall w \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{c}}(I), \quad \int_I f \left[w - (\int_I w)\psi \right] = 0,$$

soit

$$\forall w \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{c}}(I), \quad \int_I \left[f - \left(\int_I f\psi \right) \right] w = 0.$$

Par densité, comme précédemment, $f = \int_I f\psi$ presque partout. □

Lemme 6. Soit $g \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(I)$. On fixe $y_0 \in I$ et on pose

$$v(x) = \int_{y_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t, \qquad x \in I.$$

Alors v est continue sur I et pour toute fonction test φ :

$$\int_I v\varphi' = -\int_I g\varphi.$$

Démonstration. Elle est continue d'après les propriétés générales de l'intégrale et on peut faire le calcul qui suit par Fubini. □

Avec ces deux lemmes, on obtient un résultat fondamental sur l'espace de Sobolev.

Théorème 7. Soit $u \in \mathrm{H}^1(I)$. Alors u est égale presque partout à une fonction continue.

Démonstration. On fixe $y_0 \in I$ et on pose $\widetilde{u}(x) = \int_{y_0}^{x} u'(t)\,\mathrm{d}t$. D'après les lemmes précédents, $u - \widetilde{u} = C$ presque partout donc $\widetilde{u} + C$ convient. □

Théorème 8. (opérateur de prolongement)
Il existe un opérateur de prolongement $P : \mathrm{H}^1(I) \to \mathrm{H}^1(\mathbb{R})$ linéaire continu tel que pour tout u :

— $P(u_{|I}) = u$

— $\|P(u)\|_2 \leq C\|u\|_2$

— $\|P(u)\|_{\mathrm{H}^1(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{\mathrm{H}^1(I)}$,

avec C une constante qui ne dépend que de I.

Démonstration. On survole rapidement les idées de la preuve. Dans le cas $I = \mathbb{R}_+^*$, on prolonge par réflexion, et on montre que ça convient. Pour le cas $I =]0,1[$, on construit $\eta \in \mathcal{C}^1$, $0 \leq \eta \leq 1$, qui vaut 1 sur $]-\infty, \frac{1}{4}[$, et 0 pour $x > \frac{3}{4}$. On prolonge alors $u \in \mathrm{H}^1(I)$ par 0 sur $\mathbb{R}_+^*$ et on montre que $\eta u \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}_+^*)$, et qu'on peut dériver le produit comme on a l'habitude de la faire. Ainsi, si on écrit $u = \eta u + (1-\eta)u$, on peut prolonger chacune de ces fonctions sur le côté qui coince, puis prolonger par réflexion, puis prendre comme opérateur de prolongement la somme des prolongements de ηu et $(1 - \eta u)$. □

Théorème 9. Soit $u \in \mathrm{H}^1(I)$. Il existe une suite $(u_n) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que $(u_{n|I})$ converge dans $\mathrm{H}^1(I)$ vers u.

Démonstration. Le théorème précédent permet de traiter uniquement le cas $I = \mathbb{R}$. On utilise deux lemmes de convolution et troncature, mentionnés ci-dessous dans démonstration :

— Si $\rho \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et $v \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R})$. Alors $(\rho * v) \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R})$ et $(\rho * v)' = \rho * v'$.

— Si $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est telle que $0 \leq \zeta \leq 1, \zeta(x) = 1$ si $|x| \leq 1$ et $= 0$ si $|x| \geq 2$. Alors $\zeta(x/\cdot)f$ converge dans L^2 vers f ($f \in \mathrm{L}^2$).

Une fois que l'on a ces deux lemmes, on considère (ρ_n) une suite régularisante et $u_n := \zeta_n(\rho_n * u)$. On a alors

$$u_n - u = \zeta_n((\rho_n * u) - u) + (\zeta_n u - u)$$

d'une part et

$$u_n' - u' = \zeta_n'(\rho_n * u) + \zeta_n(\rho_n * u') - u'$$

d'autre part. On majore alors les normes pour obtenir ce qu'il faut. □

Définition 10. On note $\mathrm{H}^1_0(I)$ l'adhérence dans $\mathrm{H}^1(I)$ de $\mathcal{C}^1_{\mathrm{c}}$.

Remarque 11. C'est un espace de Hilbert séparable muni de la norme induite. De plus, $\mathcal{D}(I)$ est dense dans $\mathrm{H}^1_0(I)$. De plus, $\mathrm{H}^1(I) \cap \mathcal{C}^1_{\mathrm{c}}(I) \subset \mathrm{H}^1_0(I)$.

Théorème 12. Soit $u \in \mathrm{H}^1(I)$. Alors $u \in \mathrm{H}^1_0(I)$ si et seulement si $u = 0$ sur ∂I (la frontière de I).

Démonstration. Le sens direct est direct. Réciproquement, si u s'annule sur ∂I, on fixe $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que $G(t) = 0$ si $|t| \leq 1$ et $G(t) = t$ si $|t| \geq 2$, avec $|G(t)| \leq |t|$ pour tout t. On pose alors $u_n = \frac{1}{n} G \circ (nu) \in \mathrm{H}^1(I)$. On vérifie alors que le support de u_n est inclus dans $\{|u| \geq \frac{1}{n}\}$. Ainsi u_n est à support compact donc dans H^1_0. Par convergence dominée, on vérifie que u_n converge dans H^1 vers u. ☐

Proposition 13. (inégalité de Poincaré)
On suppose que I est borné. Alors il existe C ne dépendant que de I tel que

$$\|u\|_{\mathrm{H}^1} \leq C\|u'\|_2 \qquad \forall u \in \mathrm{H}^1_0(I).$$

Démonstration. Si $I =]a, b[$, on écrit

$$|u(x)| = |u(x) - u(a)| \leq \int_a^x |u'| \leq \|u'\|_1 \leq C\|u'\|_2 \text{ par Cauchy-Schwarz,}$$

on conclut en mettant au carré, puis en intégrant, puis en prenant la racine carrée. ☐

Maintenant que l'on a tous ces outils, on veut résoudre le problème suivant :

$$-u'' + u = f$$

sur $I =]0, 1[$ avec les conditions $u(0) = u(1) = 0$, et f une fonction donnée.

Définition 14. Une *solution faible* de ce problème est une fonction $u \in \mathrm{H}^1_0(I)$ telle que

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv \qquad \forall v \in \mathrm{H}^1_0(I).$$

Proposition 15. Le problème précédent admet une unique solution faible si $f \in \mathrm{L}^2$.

Démonstration. Il s'agit juste d'appliquer le théorème de Riesz sur H^1_0 pour la forme linéaire $v \mapsto \int_I fv$. ☐

Remarque 16. Si $f \in \mathrm{L}^2(I)$, alors $u' \in \mathrm{H}^1$ et si $f \in \mathcal{C}^0$, alors $u \in \mathcal{C}^2$.

On peut aller plus loin en ajoutant des coefficients. On prend toujours $I =]0, 1[$.

Théorème 17. (problème de Sturm-Liouville)
Soit $p \in \mathcal{C}^1(\overline{I})$ tel que $p \geq \alpha > 0$, $q \in \mathcal{C}^0(\overline{I})$ positive non nulle et $f \in \mathrm{L}^2(I)$. On s'intéresse au problème

$$-(pu')' + qu = f$$

avec les conditions aux bords $u(0) = u(1) = 0$.

Une *solution faible* de ce problème est une fonction $u \in \mathrm{H}^1_0(I)$ telle que

$$\int_I pu'v' + \int_I quv = \int_I fv \qquad \forall v \in \mathrm{H}^1_0(I).$$

Si $f \in \mathrm{L}^2(I)$, alors le problème admet une unique solution faible. Si de plus f est continue sur $\overline{I}$, alors u est $\mathcal{C}^2$ sur I.

Démonstration. On va adapter la preuve précédente, mais avec le produit scalaire $\langle u, v\rangle' = \langle pu', v'\rangle + \langle qu, v\rangle$. C'est bien un produit scalaire car p et q sont positives, avec $p \geq \alpha > 0$ sur $\overline{I}$. Par Poincaré d'une part et car p et q sont bornées d'autre part, la norme associée à ce nouveau produit scalaire est équivalente à celle de H^1. Ainsi, on obtient un espace de Hilbert et on peut appliquer Riesz à la forme linéaire continue $v \mapsto \int_I fv$. On obtient alors bien le résultat voulu. ☐

Référence : Haïm Brézis, *Cours d'analyse fonctionnelle.*