

# Développement: Formule sommatoire de Poisson

Arthur Maritch-Roy

Dans ce développement, on montre la formule sommatoire de Poisson ainsi que plein d'applications de celle-ci. On note  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  la classe de Schwartz et on prend pour conventions :

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x} d\xi \text{ et } c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx} dx,$$

si  $f$  est dans  $L^1$  et  $g$  est  $L^1$  sur  $[0, 2\pi]$  et  $2\pi$ -périodique.

**Théorème 1.** (Formule sommatoire de Poisson)

Soit  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{inx}.$$

*Démonstration.* Soit  $f_n : x \mapsto f(x + 2\pi n)$ . On s'intéresse à la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n$ . Soit  $[-K, K]$  un compact de  $\mathbb{R}$ . Pour  $|n| > K$ , une majoration simple donne :

$$\begin{aligned} |f(x + 2\pi n)| &\leq \frac{M}{|1 + (x + 2\pi n)^2|} \text{ car } f \text{ est dans la classe de Schwartz} \\ &\leq \frac{M}{1 + (K + 2\pi|n|)^2}. \end{aligned}$$

Ceci montre que la série considérée converge normalement sur tout compact, donc que la série définit une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ . En refaisant le même travail sur la série des dérivées, on obtient le caractère  $\mathcal{C}^1$  de la somme, que l'on note  $F$ . Par un changement d'indice, on montre simplement que  $F$  est  $2\pi$ -périodique.

On peut donc appliquer le théorème de Dirichlet à  $F$ , *i.e.*  $F$  est somme de sa série de Fourier. Calculons les coefficients de Fourier de  $F$ . Soit  $n \in \mathbb{Z}$  :

$$\begin{aligned} c_n(F) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x)e^{-inx} dx \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} f(x + 2k\pi)e^{-inx} dx \text{ (on intervertit par convergence normale)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(u)e^{-inx} dx \text{ (on recolle les intégrales par changement de variable)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \widehat{f}(n). \end{aligned}$$

Somme toute, on a bien la formule sommatoire de Poisson. □

**Remarque 1.** On peut appliquer cette formule sous des hypothèses plus faibles. En effet, la seule chose dont on a vraiment besoin est le caractère  $\mathcal{C}^1$  de la somme, c'est-à-dire la convergence normale de la série de fonctions, pour pouvoir appliquer le théorème de Dirichlet. On peut donc se restreindre aux hypothèses suivantes :

- $f \in \mathcal{C}^0 \cap L^1$  et  $|f| \leq \frac{M}{(1+\cdot)^\alpha}$ ,  $M > 0$ ,  $\alpha > 1$
- $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty$  ou bien  $|f'| \leq \frac{M}{(1+\cdot)^\alpha}$ ,  $M > 0$ ,  $\alpha > 1$ .

**Corollaire 2.** (Formule d'inversion de Fourier)

Soit  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

**Démonstration.** On considère, pour  $t \in \mathbb{R}$ , fonction de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  définie par :

$$f_t : x \mapsto f(x)e^{itx}.$$

Appliquons la formule sommatoire de Poisson à  $f_t$  puis à sa transformée de Fourier : pour tout  $y \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_t(y + 2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_t(n) e^{iny} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_t(2\pi n - y).$$

En calculant les termes de la première et de la troisième somme :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(y + 2\pi n) e^{2i\pi nt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi n - y) e^{-2i\pi nt}.$$

Par convergence normale des séries sur  $[0, 1]$ , on peut intégrer sur cet intervalle en intervertissant et ainsi on ne garde que le terme en  $n = 0$  qui donne :

$$f(y) = \frac{1}{2\pi} \hat{f}(-y),$$

ce qui est bien la formule d'inversion de Fourier. □

**Remarque 2.** Par densité de la classe de Schwartz dans  $L^1$ , on peut en déduire la formule d'inversion de Fourier pour une fonction  $L^1$ .

Une autre application de la formule sommatoire de Poisson est le théorème d'échantillonnage de Shannon.

**Théorème 3.** (Échantillonnage de Shannon)

Soit  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  telle que le support de  $\hat{f}$  soit inclus dans  $[-F, F]$  avec  $F > 0$  et  $2F \leq 2\pi$ , alors :

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \operatorname{sinc}(\pi(\cdot - k)).$$

**Démonstration.** On commence par utiliser la formule de Poisson. Pour  $\xi \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \mathbf{1}_{[-\pi, \pi]}(\xi) \hat{f}(\xi) \quad \text{car le support de } \hat{f} \text{ est inclus dans } [-\pi, \pi] \\ &= \mathbf{1}_{[-\pi, \pi]}(\xi) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + 2\pi n) \\ &= \mathbf{1}_{[-\pi, \pi]}(\xi) \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(-n) e^{in\xi} \quad \text{d'après la formule de Poisson et par inversion de Fourier} \\ &= \mathbf{1}_{[-\pi, \pi]}(\xi) \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) e^{-in\xi}. \end{aligned}$$

Par inversion de Fourier et d'après le calcul que l'on vient de faire :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) e^{i(x-n)\xi} d\xi.$$

Par convergence normale de la série (puisque l'on est dans la classe de Schwartz), on peut intervertir :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x-n)\xi} d\xi.$$

On reconnaît la transformée de Fourier de la fonction porte et cela permet donc de conclure.  $\square$

**Remarque 3.** En termes physiques, cela signifie que si le spectre d'un signal est assez bien localisé, on peut reconstruire le signal à partir d'un nombre discret de points. Cela peut paraître surprenant à première vue, mais en fait ça peut se comprendre. En effet, on peut montrer qu'une fonction dont la transformée de Fourier est à support compact peut être prolongée en une fonction entière. En particulier, elle est analytique sur  $\mathbb{R}$  et on peut donc la reconstruire par sa série de MacLaurin.

**Application 1.** (Fonction  $\vartheta$  de Jacobi)

On pose  $\vartheta : x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x}$ , pour  $x > 0$ . La fonction  $\vartheta$  est solution de l'équation fonctionnelle suivante sur  $\mathbb{R}_+^*$  :

$$\vartheta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \vartheta\left(\frac{1}{x}\right).$$

**Démonstration.** On considère la fonction  $x \mapsto e^{-\alpha x^2}$  pour  $\alpha > 0$ . Sa transformée de Fourier est  $\xi \mapsto \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}$ . On applique la formule de Poisson à cette fonction, qui est dans la classe de Schwartz, ce qui donne :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\alpha(2\pi n)^2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{n^2}{4\alpha}}.$$

En prenant  $\alpha = \frac{x}{4\pi}$ , on obtient le résultat voulu.  $\square$

**Références :** la formule de Poisson et l'échantillonnage peuvent se trouver dans Bernis et Bernis, *40 développements pour l'agrégation*. La partie sur le thème de Jacobi vient de Zuily et Queffelec, *Analyse pour l'agrégation*.