

Développement: sous-groupes compacts du groupe linéaire

Arthur Maritch-Roy

Dans ce développement, on donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ soit compact.

Définition 1. Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$. On dit que $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est invariant pour G (en tant que produit scalaire) si $G \subset O(B)$ i.e. si pour tout $M \in G, M^T B M = B$.

Proposition 2. Un sous-groupe G de $GL_n(\mathbb{R})$ possède un produit scalaire invariant si et seulement si G est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. Soit B symétrique définie positive invariante pour G , cela veut dire que $G \subset \text{Stab}_B$ (pour l'action de congruence). La matrice B ayant une racine carrée symétrique, elle est dans l'orbite de l'identité, donc par principe de conjugaison G est conjugué au stabilisateur de l'identité, qui n'est autre que $O_n(\mathbb{R})$. Réciproquement, si $G = P^{-1} H P$ pour P inversible et H un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$, on écrit $P = O R$ la décomposition polaire de P et $B = R^2$ donne la produit scalaire voulu. \square

Théorème 3. (point fixe de Kakutani)

Soit E un espace euclidien et G un sous-groupe compact de $GL(E)$ et K un convexe compact non vide de E tel que $g(K) \subset K$ pour tout g dans G . Alors il existe $z \in K$ tel que $g(z) = z$ pour tout $g \in G$.

Démonstration. Soit $N : x \mapsto \max_{g \in G} \|g(x)\|$, qui est bien définie car G est compact. C'est une norme; la séparation et l'homogénéité sont directes, et l'inégalité triangulaire se voit en prenant un g_0 qui atteint le maximum. De plus elle est invariante pour G . Pour avoir égalité dans l'inégalité triangulaire, il faut et il suffit que $\|g_0(x + y)\| = \|g_0(x)\| + \|g_0(y)\|$, ce qui est vrai si et seulement si $g_0(x)$ et $g_0(y)$ sont positivement liés, si et seulement si x et y le sont car g_0 est un isomorphisme. La norme N est continue. On peut donc considérer par compacité un élément de K de norme N minimale, on l'appelle z et sa norme m . Montrons que z est unique. Pour cela si y vérifie la même chose, on peut considérer $a := \frac{y+z}{2} \in K$ (par convexité), et on a alors

$$m \leq N(a) = \frac{1}{2} N(y + z) \leq m$$

donc $N(y + z) = N(y) + N(z)$ donc y et z sont positivement liés. Puisqu'ils sont de même norme ils sont égaux. Soit $g \in G$; on a $N(g(z)) = N(z) = m$ et par unicité : $g(z) = z$. \square

Théorème 4. Tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. Soit H un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ soit $\rho : M \mapsto (S \mapsto M^T S M)$. C'est un morphisme de groupe du groupe opposé de H vers $GL(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$ qui est continue car polynomiale en les coefficients de M donc $G = \rho(H)$ est un sous-groupe compact de $GL(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$. Soit alors $K := \text{Conv}(\{M^T M, M \in H\})$ qui est convexe compact par Carathéodory (donc inclus dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$). On vérifie que K est stable par G . Le point fixe de Kakutani et la première proposition permettent de conclure. \square