

# Développement: Théorème de Banach-Steinhaus et séries de Fourier

Arthur Maritch-Roy

On s'intéresse dans ce développement au théorème de Banach-Steinhaus et à une de ses applications à la théorie des séries de Fourier. On passe par le lemme de Baire, qui possède de très nombreuses autres applications.

**Théorème 1.** (de Baire)

Soit  $(E, d)$  un espace métrique complet. Toute intersection d'ouverts denses est dense.

*Démonstration.* Soit  $\Omega = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} O_n$  une intersection d'ouverts denses de  $E$ . Pour  $\omega$  un ouvert de  $E$ , montrons que  $\Omega \cap \omega$  est non vide. Comme  $O_1$  est dense,  $\omega \cap O_1$  contient une boule fermée  $\overline{B}_1 := \overline{B}(x_1, r_1)$ , et on peut supposer  $0 < r_1 < 1$ . Comme  $O_2$  est dense, la boule ouverte  $B_1$  rencontre  $O_2$ , donc rencontre une boule fermée  $\overline{B}_2$ , de centre  $x_2$  et de rayon  $r_2 < \frac{1}{2}$ . Par récurrence, on a des boules ouvertes emboîtées  $(B_n)$  telles que

$$B_n \subset \overline{B}_n = \overline{B}(x_n, r_n) \subset B_{n-1} \cap O_n \subset B_{n-1}.$$

avec  $r_n < \frac{1}{n}$ . Alors la suite  $(x_n)$  est de Cauchy car  $d(x_n, x_{n+p}) < \frac{1}{n}$  (puisque  $x_{n+p} \in B_n$ ). À la limite, on a alors  $x \in \overline{B}_n$  pour tout  $n$  donc  $x \in \Omega$  et de plus  $x \in \overline{B}_1 \subset \omega$  donc  $x \in \Omega \cap \omega$ .  $\square$

**Application 2.** Une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ne peut pas être continue en les rationnels et discontinue en les irrationnels. Cependant, l'inverse est possible (fonction de Thomae).

**Remarque 3.** Une formulation équivalente du théorème de Baire est que toute union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

**Théorème 4.** (de Banach-Steinhaus)

Soit  $(E, \|\cdot\|_E)$  un espace de Banach et  $(F, \|\cdot\|_F)$  un espace vectoriel normé. Soit  $(T_i)_{i \in I}$  une famille (pas forcément dénombrable) d'applications linéaires et continues. On suppose que pour tout  $x$ , la famille  $(T_i(x))_i$  est bornée dans  $F$ . Alors la famille  $(T_i)$  est bornée en norme d'opérateur.

*Démonstration.* Pour  $(n, i) \in \mathbb{N} \times I$ , on pose  $X_{n,i} = \{x \in E, \|T_i(x)\|_F \leq n\}$ . C'est un fermé de  $E$  comme image réciproque d'un fermé. Ainsi,  $Y_n := \bigcap_{i \in I} X_{n,i}$  est un fermé de  $E$  comme intersection de fermés. Comme  $E$  est complet et  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n = E$  est d'intérieur non vide, il existe par le théorème de Baire un  $n_0$  tel que  $Y_{n_0}$  est d'intérieur non vide. Soit alors  $x_0 \in E$  et  $r > 0$  tels que  $B_E(x_0, r) \subset Y_{n_0}$ , c'est-à-dire :

$$\forall z \in B_E(x_0, r), \forall i \in I, \|T_i(x_0 + rz)\|_F \leq n_0.$$

Par linéarité et inégalité triangulaire, il vient :

$$\begin{aligned} \forall z \in B_E(x_0, r), \forall i \in I, \|T_i(z)\|_F &= \left\| \frac{1}{r} (T_i(x_0 + rz) - T_i(x_0)) \right\|_F \\ &\leq \frac{\|T_i(x_0 + rz)\|_F + \|T_i(x_0)\|_F}{r} \\ &\leq \frac{2n_0}{r}. \end{aligned}$$

On a donc  $\sup_i \|T_i\|_{E,F} \leq \frac{2n_0}{r} < \infty$ .  $\square$

**Corollaire 5.** Sous les mêmes hypothèses, si  $(T_n)$  converge simplement vers  $T$ , alors  $(\|T_n\|)$  est bornée,  $T$  est linéaire continue et la norme de  $T$  est plus petite que la limite inférieure des normes des  $T_n$ .

**Application 6.** Il existe une fonction continue  $2\pi$ -périodique dont la série de Fourier ne converge pas en  $t = 0$ .

**Démonstration.** On munit l'espace  $E$  des fonctions continues  $2\pi$ -périodiques de la norme infinie, qui en fait bien un Banach. Pour tout  $N$ , on définit la forme linéaire  $\Lambda_N : f \mapsto (f * D_N)(0)$ , où  $D_N$  est le noyau de Dirichlet. Pour tout  $N$ ,  $\Lambda_N$  est une forme linéaire continue de norme  $\|D_N\|_1$  (en effet, des majorations simples donnent l'inégalité, et pour l'égalité on approche la fonction "signe de  $D_N$ " par des fonctions continues).

Ensuite, on montre que  $\|D_N\|_1 \rightarrow +\infty$ . Ainsi, par le corollaire précédent,  $\Lambda_N$  ne peut pas converger simplement. Il existe une fonction dont la série de Fourier ne converge pas en 0.  $\square$

**Référence :** Cours de Karine Beauchard, éventuellement trouvable sur son site web. Sinon, X. Gourdon doit faire des preuves de Baire et Banach-Steinhaus dans son livre d'analyse.