

Développement: Théorème taubérien fort

Arthur Maritch-Roy

On montre dans ce document le théorème taubérien fort, qui fournit une réciproque au lemme radial d'Abel.

Théorème 1. (théorème taubérien fort)

Soit $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ avec $a_n = O(1/n)$ et

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \ell \in \mathbb{C}.$$

Alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ converge et sa somme vaut ℓ .

Démonstration. Quitte à changer a_0 on peut prendre $\ell = 0$. On voudrait écrire la chose suivante :

$$0 = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \lim_{x \rightarrow 1^-} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n,$$

mais aucun des théorèmes généraux ne permet de justifier l'interversion. On sait que pour une fonction polynomiale p nulle en 0, on peut passer à la limite dans $\sum_{n=0}^{\infty} a_n p(x^n)$ quand x tend vers 1. En effet, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x^n)^k = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x^k)^n = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x^k) = 0$$

par composition de limites. On voudrait ce même résultat d'interversion pour une fonction constante égale à 1 au voisinage de 1. En effet, posons

$$\mathcal{F} = \left\{ \varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \varphi(x^n) \text{ converge pour tout } x < 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \varphi(x^n) = 0 \right\}$$

et $g := \mathbf{1}_{[1/2, 1]}$. Pour $x < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n g(x^n) = \sum_{n=0}^{\frac{\ln(2)}{\ln(x)}} a_n.$$

Ainsi, si $g \in \mathcal{F}$, on a le résultat voulu. On a donc d'une part $x\mathbb{R}[x] \subset \mathcal{F}$ et on veut montrer d'autre part que g est dans \mathcal{F} . Cherchons donc à approximer g par des fonctions de $x\mathbb{R}[x]$. Pour savoir comment et pour quelle norme, partons de ce que l'on veut. Si on a deux polynômes $p_1 \leq g \leq p_2$ nuls en 0 :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n g(x^n) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_1(x^n) \right| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (p_2(x^n) - p_1(x^n)) \\ &=: \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| p_3(x^n). \end{aligned}$$

Pour que notre idée soit féconde, il faut pouvoir estimer ce genre de quantités lorsque x tend vers 1. Remarquons alors que pour $k \in \mathbb{N}$:

$$(1-x) \sum_{n=1}^{\infty} x^n x^{kn} = (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} (x^{k+1})^n = (1-x) \frac{x^{k+1}}{1-x^{k+1}} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{k+1} = \int_0^1 u^k du,$$

donc pour tout polynôme p ,

$$(1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} x^n p(x^n) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \int_0^1 p.$$

On cherchera donc p_3 sous la forme $p_3(x) = x(1-x)q(x)$ avec $q \in \mathbb{R}[x]$, puisqu'alors on pourra appliquer notre hypothèse sur (a_n) pour avoir :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| p_3(x) &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M}{n} x^n (1-x^n) q(x^n) \\ &\leq M \sum_{n=0}^{+\infty} x^n q(x^n) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} M \int_0^1 q(t) dt. \end{aligned}$$

Ainsi, on peut clarifier notre objectif; il nous faut p_1 et p_2 deux polynômes qui encadrent g (comme précédemment) et tels que $\int_0^1 \frac{p_2(t)-p_1(t)}{t(1-t)} dt$ est arbitrairement petit. On aura alors pour $\varepsilon > 0$ fixé :

$$\begin{aligned} \limsup_{x \rightarrow 1^-} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n g(x^n) \right| &= \limsup_{x \rightarrow 1^-} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n g(x^n) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_1(x^n) \right| \\ &\leq M \int_0^1 \frac{p_2(t) - p_1(t)}{t(1-t)} dt \\ &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui permettra de conclure. Le problème qui nous reste est alors uniquement un problème d'approximation de fonctions. On cherche p_1 et p_2 de la forme

$$p_i(x) = x + x(1-x)(r_i(x) + (-1)^i \varepsilon), \text{ avec } r_i \in \mathbb{R}[x].$$

Remarquons qu'on a rajouté le facteur x puisque si l'on veut approcher g , on peut s'attendre à ce que $p_i(1)$ soit proche de 1. On a alors

$$\int_0^1 \frac{p_2(t) - p_1(t)}{t(1-t)} dt = \int_0^1 (r_2(t) - r_1(t)) dt + 2\varepsilon.$$

On cherche donc à avoir $\int_0^1 (r_2(t) - r_1(t)) dt$ petite, avec la condition

$$r_1(x) - \varepsilon \leq \frac{g(x) - x}{x(1-x)} =: h(x) \leq r_2(x) - \varepsilon.$$

Pour cela, on voudrait utiliser le théorème de Weierstrass mais on ne peut pas directement car la fonction h n'est pas continue en $\frac{1}{2}$. On approche donc h par s_1 et s_2 ($s_1 \leq h \leq s_2$) continues telles que $\int_0^1 (s_2 - s_1) \leq \varepsilon$. D'après le théorème de Weierstrass, on a alors r_1 et r_2 tels que $r_2(x) - s_2(x) \leq \varepsilon$ et $s_1(x) - r_1(x) \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [0, 1]$. On a alors les encadrements voulus, et

$$\int_0^1 (r_2 - r_1) = \int_0^1 (r_2 - s_2) + \int_0^1 (s_2 - s_1) + \int_0^1 (s_1 - r_1) \leq 3\varepsilon,$$

ce qui permet de conclure. □