

# Développement: Théorème limite central, extension pour les densités, développement d'Edgeworth

Arthur Maritch-Roy

Dans ce développement, on montre le théorème limite central, fondamental en probabilités et en statistiques, et on montre comment il peut s'étendre aux densités. Enfin, on le raffine avec la connaissance des premiers moments de notre mesure.

**Lemme.** Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $t > 0$  :

$$\left| e^{it} - 1 - it - \dots - \frac{(it)^{n-1}}{(n-1)!} \right| \leq \frac{t^n}{n!}.$$

*Démonstration.* C'est l'inégalité de Taylor-Lagrange. □

**Lemme.** Si  $X$  admet un moment d'ordre  $n$  alors sa fonction caractéristique  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^n$ , et

$$\varphi^{(n)}(\xi) = i^n \int_{\mathbb{R}} x^n e^{i\xi x} d\mathbb{P}_X(x).$$

*Démonstration.* Par théorème de dérivation sous l'intégrale. □

**Remarque 1.** Lorsque  $\xi = 0$ , on retrouve les moments (à une constante près).

**Corollaire 1.** Avec les mêmes hypothèses et notations, on a le développement de Taylor suivant :

$$\left| \varphi(\xi + t) - \varphi(\xi) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^k}{k!} \varphi^{(k)}(\xi) \right| \leq M_n \frac{|t|^n}{n!}.$$

**Théorème 2.** (théorème limite central)

Soit  $(X_i)$  une suite i.i.d de variables aléatoires centrées et réduites (*a fortiori* dans  $L^2$ ), et soit  $\overline{X_n} := \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ . Alors  $\sqrt{n}\overline{X_n}$  converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

*Démonstration.* D'après le corollaire, on a un développement limité de la fonction caractéristique  $\varphi$  des  $X_i$  :

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \frac{x^2}{2}\varphi''(0) + o(x^2).$$

En prenant  $x = \frac{\xi}{\sqrt{n}}$  et en prenant à la puissance  $n$  :

$$\varphi_{\sqrt{n}\overline{X_n}}(\xi) = \left( 1 - \frac{1}{2n}\xi^2 + o(1/n) \right)^n \xrightarrow{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}.$$

On reconnaît la fonction caractéristique de la gaussienne et on conclut donc avec le théorème de Lévy. □

**Théorème 3.** (théorème limite central pour les densités)

On suppose que  $X_1$  est à densité, de densité  $f$ . Si  $\varphi$  est intégrable alors la suite des densités  $f_n$  de  $\sqrt{n}\overline{X_n}$  converge uniformément vers la densité de la loi normale centrée réduite, notée  $g$ .

**Démonstration.** Par inversion de Fourier,

$$f_n(x) - g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left( \varphi \left( \frac{\xi}{\sqrt{n}} \right)^n - e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \right) e^{i\xi x} d\xi.$$

Soit :

$$|f_n(x) - g(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left| \varphi \left( \frac{\xi}{\sqrt{n}} \right)^n - e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \right| d\xi.$$

On utilise ici un fait général, pour majorer la norme infinie on peut passer en Fourier et cela revient à majorer la norme 1 de la transformée de Fourier. D'après le théorème limite central classique, on sait que l'intégrande en question converge simplement vers 0. Cependant, on n'a *a priori* pas de domination simple pour appliquer le théorème de convergence dominée, car ça coince à l'infini. On va pallier ce problème en découpant  $\mathbb{R}$ . Soit  $a > 0$ , à calibrer éventuellement plus tard ; l'intégrale

$$\int_{-a}^a \left| \varphi \left( \frac{\xi}{\sqrt{n}} \right)^n - e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \right| d\xi$$

converge vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini par convergence dominée. Pour le reste de l'intégrale, il y a deux sous-cas. En effet, quand  $\xi$  va être très grand, on s'attend à ce que l'intégrande soit petite et pour  $\xi$  de l'ordre de  $\sqrt{n}$ , on s'attend à pouvoir contrôler  $\varphi$  au vu de son développement limité au voisinage de 0. Mettons tout cela en forme ; d'après le développement de  $\varphi$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $|\varphi(\xi)| \leq e^{-\frac{1}{4}\xi^2}$  dès que  $|\xi| < \delta$ . Pour  $a < |\xi| < \delta\sqrt{n}$  :

$$\left| \varphi \left( \frac{\xi}{\sqrt{n}} \right)^n - e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \right| \leq (e^{-\frac{1}{4n}\xi^2})^n + e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \leq 2e^{-\frac{\xi^2}{4}}$$

pour tout  $n$ . En prenant  $a$  assez grand (et indépendamment de  $n$ ), cette borne peut être rendue plus petite que  $\varepsilon$  fixé *a priori*. Enfin,

$$\int_{|\xi| > \delta\sqrt{n}} \left| \varphi \left( \frac{\xi}{\sqrt{n}} \right)^n - e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \right| d\xi \leq \left( \sup_{|\xi| \geq \delta} |\varphi| \right)^{n-1} \int_{\mathbb{R}} \left| \varphi \left( \frac{\xi}{\sqrt{n}} \right) \right| d\xi + \int_{|\xi| > \delta\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} d\xi.$$

D'après le lemme de Riemann-Lebesgue, le suprémum peut être rendu strictement inférieur à 1 pour  $\delta$  assez grand. L'intégrale à côté se calcule par changement de variable et vaut  $\sqrt{n} \int_{\mathbb{R}} |\varphi|$ . Par croissances comparées, ce premier terme tend vers 0. Le deuxième terme également comme reste d'une intégrale convergente.  $\square$

**Remarque 2.** On peut affaiblir les hypothèses,  $\varphi$  peut n'être intégrable qu'à partir d'une certaine puissance.

**Théorème 4.** (premier terme du développement d'Edgeworth)

Soit  $(X_i)$  une suite i.i.d de variables à densité centrées de variance  $\sigma^2$ , et avec un moment d'ordre trois  $\mu_3$ . On suppose que leur fonction caractéristique commune  $\varphi$  est intégrable. Alors

$$\|f_n - g - \frac{\mu_3}{6\sigma^3\sqrt{n}}(x^3 - 3x)g\|_{\infty} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

où  $f_n$  est la densité de  $\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n}{\sigma}$ .

**Démonstration.** Au début, on procède comme précédemment, on passe en Fourier et on cherche à dominer l'intégrande :

$$\left| f_n(x) - g(x) - \frac{\mu_3}{6\sigma^3\sqrt{n}}(x^3 - 3x)g(x) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left| \varphi \left( \frac{\xi}{\sigma\sqrt{n}} \right)^n - e^{-\frac{1}{2}\xi^2} - \frac{\mu_3}{6\sigma^3\sqrt{n}}(i\xi)^3 e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \right| d\xi.$$

Comme dans le cas précédent, par Riemann-Lebesgue, l'intégrale de notre intégrande pour  $|\xi| > \sigma\delta\sqrt{n}$  (où  $\delta > 0$  est fixé) tend vers 0 exponentiellement vite quand  $n$  tend vers l'infini. On peut donc écrire notre intégrale comme

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \varphi \left( \frac{\xi}{\sigma\sqrt{n}} \right)^n - e^{-\frac{1}{2}\xi^2} - \frac{\mu_3}{6\sigma^3\sqrt{n}} (i\xi)^3 e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \right| d\xi = \int_{|\xi| < \sigma\delta\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \left| e^{n\psi(\xi/\sigma\sqrt{n})} - 1 - \frac{\mu_3}{6\sigma^3\sqrt{n}} (i\xi)^3 \right| d\xi + o(1/n), \quad \text{où } \psi(\xi) := \log(\varphi(\xi)) + \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2.$$

Notons qu'il est légitime de prendre un logarithme complexe puisque l'argument en question est dans le cercle de centre 1 et de rayon 1. On cherche donc à majorer ce que l'on a dans le module. Pour cela, on a à comparer une exponentielle et une quantité qui ressemble à son développement limité. On voudrait une inégalité qui permet de découpler l'exponentielle et son argument.

**Lemme.** Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux complexes. Alors  $|e^\alpha - 1 - \beta| \leq (|\alpha - \beta| + \frac{1}{2}|\beta|^2)e^{\max(|\alpha|, |\beta|)}$ .

**Démonstration du lemme.** On écrit  $|e^\alpha - 1 - \beta| \leq |e^\alpha - e^\beta| + |e^\beta - 1 - \beta|$ . Le premier terme se majore comme suit :

$$\begin{aligned} |e^\alpha - e^\beta| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\alpha^k - \beta^k|}{k!} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\alpha - \beta|}{k!} \sum_{i=0}^{k-1} |\alpha^{k-1-i} \beta^i| \\ &\leq |\alpha - \beta| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\max(|\alpha|, |\beta|)^{k-1}}{(k-1)!} \\ &\leq |\alpha - \beta| e^{\max(|\alpha|, |\beta|)}. \end{aligned}$$

Et le deuxième de la façon suivante :

$$|e^\beta - 1 - \beta| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|\beta|^k}{k!} \leq \frac{|\beta|^2}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|\beta|^{k-2}}{k!/2} \leq \frac{|\beta|^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\beta|^k}{(k+2)!/2} \leq \frac{|\beta|^2}{2} e^{|\beta|},$$

puisque pour  $k$  entier,  $\frac{(k+2)!}{2} \geq k!$ .

Ceci étant fait, on peut revenir à la preuve du théorème ; le lemme donne (pour  $|\xi| < \delta\sigma\sqrt{n}$ ) :

$$\left| e^{n\psi(\xi/\sigma\sqrt{n})} - 1 - \frac{\mu_3}{6\sigma^3\sqrt{n}} (i\xi)^3 \right| \leq \left( n\psi(\xi/\sigma\sqrt{n}) - \frac{\mu_3}{6\sigma^3\sqrt{n}} (i\xi)^3 \right) + \frac{\mu_3^2 \xi^6}{72 n \sigma^6} e^\gamma,$$

avec  $\gamma$  un majorant des modules de nos  $\alpha$  et  $\beta$ . Il nous reste donc à estimer  $\psi(\xi) - \frac{\mu_3}{6}(i\xi)^3$  au voisinage de 0. Or la fonction  $\psi$  est de classe  $\mathcal{C}^3$  au voisinage de 0 (car  $\varphi$  l'est et  $\log$  est une série entière). En composant les développements limités au voisinage de 0, on voit que  $\psi(0) = \psi'(0) = \psi''(0)$  et que  $\psi'''(0) = i^3\mu_3$ . Soit  $\varepsilon > 0$ , d'après la formule de Taylor-Young, il existe  $\delta > 0$  tel que :

$$|\psi(\xi) - \frac{\mu_3}{6}(i\xi)^3| \leq \varepsilon\sigma^3|\xi|^3 \quad \forall |\xi| < \delta.$$

Par ailleurs, on peut aussi calibrer  $\delta$  assez petit pour que chacun des termes soit petit en module (on cherche notre  $\gamma$ ) :

$$|\psi(\xi)| < \frac{1}{4}\sigma^2\xi^2, \quad \left| \frac{\mu_3}{6}(i\xi)^3 \right| < \frac{1}{4}\sigma^2\xi^2 \quad \forall |\xi| < \delta.$$

On a alors, en prenant  $\gamma = \frac{1}{4}\sigma^2\xi^2$  :

$$\begin{aligned}
\left| e^{n\psi(\xi/\sigma\sqrt{n})} - 1 - \frac{\mu_3}{6\sigma^3\sqrt{n}}(i\xi)^3 \right| &\leq \left( \left| n\psi(\xi/\sigma\sqrt{n}) - \frac{\mu_3}{6\sigma^3\sqrt{n}}(i\xi)^3 \right| + \frac{\mu_3^2\xi^6}{72n\sigma^6} \right) e^{\frac{1}{4}\xi^2} \\
&\leq \left( n \left| \psi\left(\frac{\xi}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \frac{\mu_3}{6}\left(\frac{i\xi}{\sigma\sqrt{n}}\right)^3 \right| + \frac{\mu_3^2\xi^6}{72n\sigma^6} \right) e^{\frac{1}{4}\xi^2} \\
&\leq \left( \varepsilon \frac{|\xi|^3}{\sqrt{n}} + \frac{\mu_3^2\xi^6}{72n\sigma^6} \right) e^{\frac{1}{4}\xi^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi| < \sigma\delta\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \left| e^{n\psi(\xi/\sigma\sqrt{n})} - 1 - \frac{\mu_3}{6\sigma^3\sqrt{n}}(i\xi)^3 \right| d\xi &\leq \int_{|\xi| < \sigma\delta\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} \left( \varepsilon \frac{|\xi|^3}{\sqrt{n}} + \frac{\mu_3^2\xi^6}{72n\sigma^6} \right) d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} \left( \varepsilon \frac{|\xi|^3}{\sqrt{n}} + \frac{\mu_3^2\xi^6}{72n\sigma^6} \right) d\xi \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^3 e^{-\frac{1}{4}\xi^2} d\xi + \frac{\mu_3^2}{72n\sigma^6} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^6 e^{-\frac{1}{4}\xi^2} d\xi \\
&\leq C \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

où  $C$  est une constante et  $n$  assez grand. □