

Bifurcations dans un modèle proie-prédateur ratio-dépendant

Arthur Maritch-Roy
Jonathan Badin

Introduction

Ce travail se base sur un article de Moitri SEN, Malay BANERJEE et Andrew MOROZOV intitulé *Bifurcation analysis of a ratio-dependent prey-predator model with the Allee effect* ([SBM12]). Dans cet article, les auteurs présentent un système différentiel qui modélise l'évolution de deux populations animales (les proies et les prédateurs) et justifie ce modèle. Le travail principal de l'article consiste à effectuer une classification de toutes les bifurcations du système, c'est-à-dire à regarder l'évolution des équilibres du système en fonction de ses paramètres. Ainsi, les auteurs partagent l'espace des paramètres en régions selon la nature des équilibres, et tracent les portraits de phase dans ces différentes régions. Enfin ils discutent leurs résultats et essaient de les interpréter en termes de dynamique des populations.

À travers ce rapport, nous développons les outils mathématiques nécessaires à une bonne compréhension des résultats présentés dans l'article. Dans une première partie, nous essayons de comprendre la construction du modèle présenté dans l'article en passant par des exemples simples et de plus en plus élaborés, à une (modèle logistique) puis à deux (Lotka-Volterra) espèces, ainsi que de comprendre ce qu'est l'effet Allee. La deuxième partie se penche sur la notion de bifurcation, que nous introduisons puis que nous étudions sous deux formes : bifurcations aux points d'équilibre hyperboliques et bifurcation de Hopf. Avec ces connaissances sur les modèles de population et sur les bifurcations, nous revenons sur l'article et étudions le modèle en détail, avant de traiter deux cas de bifurcation présents dans le document.

*
* *

Table des matières

1	Modèles proie-prédateur	3
1.1	Modèles à une espèce	3
1.1.1	Modèle logistique	3
1.1.2	Effet Allee	3
1.2	Modèle de Lotka-Volterra	5
1.2.1	Portrait de phase et équilibres	6
1.2.2	Périodicité des solutions	7
1.3	Modèle ratio-dépendant avec effet Allee	8
2	Théorie des bifurcations	11
2.1	Stabilité structurelle	11
2.1.1	Cadre d'étude	11
2.1.2	Rappels sur le flot	11
2.1.3	Équivalence topologique et stabilité structurelle	12
2.1.4	Continuité des équilibres hyperboliques	13
2.1.5	Systèmes linéaires	14
2.2	Définition d'une bifurcation	16
2.3	Bifurcations et points d'équilibre	17
2.4	Bifurcations en dimension 1	18
2.4.1	Critère d'équivalence et forme normale	18
2.4.2	Diagrammes de bifurcation	21
2.5	Théorème de Sotomayor	23
2.6	Bifurcation de Hopf	24
2.6.1	Cycle limite	24
2.6.2	Application de Poincaré	28
2.6.3	Théorème de Poincaré-Andronov-Hopf	31
2.7	Tracé des diagrammes en dimension 1	32
2.7.1	Construction d'une branche	32
2.7.2	Recherche des zéros autour d'un point de bifurcations	33
2.7.3	Principe général de l'algorithme	33
2.7.4	Résultats	34
3	Étude du modèle ratio-dépendant	36
3.1	Existence des solutions	36
3.2	Équilibres	37
3.2.1	Détermination des équilibres	37
3.2.2	Stabilité des équilibres pour l'effet Allee fort	37
3.3	Bifurcation nœud-selle	38
3.4	Bifurcation de Hopf	38

Précision sur les démonstrations

Certaines des démonstrations présentes dans ce rapport sont quasiment identiques à celles que l'on peut trouver dans nos références. Nous précisons alors de quel livre elle provient. Dans le cas contraire, la rédaction de la preuve est la nôtre, et peut donc contenir des lacunes et des erreurs.

1 Modèles proie-prédateur

1.1 Modèles à une espèce

1.1.1 Modèle logistique

Le modèle de Verhulst ou modèle logistique est un modèle de croissance de population proposé par Pierre François VERHULST en 1840 en réponse aux précédents modèles qui aboutissaient à une croissance exponentielle de la population. On considère dans ce cas l'équation différentielle à une variable

$$\frac{dN}{dT} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (1)$$

En développant cette équation on obtient

$$\frac{dN}{dT} = rN - \frac{rN^2}{K}.$$

On reconnaît une équation de Bernoulli. Remarquons alors qu'en prenant la condition initiale $N_0 > 0$, comme $N = 0$ est une solution de notre équation, par le théorème de Cauchy-Lipschitz, $N > 0$ à tout instant. On peut donc poser $V := \frac{1}{N}$ et alors,

$$\frac{dV}{dT} = r \left(V - \frac{1}{K}\right).$$

On trouve finalement

$$N = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-rT}}. \quad (2)$$

Cette fonction s'appelle fonction *logistique* (personne ne sait vraiment l'origine de ce nom). Elle tend vers K en $+\infty$, ce qui justifie la dénomination de K , et on observe une inflexion qui traduit l'instant où la croissance de la population va diminuer.

1.1.2 Effet Allee

En 1931 le zoologue américain Walder Clyde ALLEE observe que ce n'est pas uniquement la compétition entre les espèces qui limite la croissance d'une population mais qu'un faible effectif peut aussi réduire la croissance. Nous traduisons cela simplement dans nos équations par l'ajout d'un terme en $N - N^*$ où $N^* \in \mathbb{Z}$ correspond au nombre critique en dessous duquel le taux de croissance de la population diminue. Notre équation différentielle devient donc :

$$\frac{dN}{dT} = rN \left(\frac{N - N^*}{K}\right) \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (3)$$

Cette fois-ci on ne connaît pas de résolution explicite. Montrons l'existence d'une solution globale pour toute condition initiale $N(0) = N_0 > 0$. Tout d'abord on a $\frac{dN}{dT} = F(N)$ avec F une fonction polynomiale donc de classe \mathcal{C}^1 . Ainsi, le théorème de Cauchy-Lipschitz local s'applique, on a existence d'une solution maximale $N : [0, T_{\max}[$. De même que précédemment on a $N > 0$ à tout instant. Montrons que N est bornée ce qui assurera que la solution est globale. On distingue deux cas :

- **Cas 1.** On suppose que $N_0 < K$. Supposons que $\sup N > K$. Fixons $K < K_1 < \sup N$ puis posons

$$T_1 := \inf\{T > 0, N(T) \geq K_1\}.$$

Par continuité de N il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall T \in [T_1 - \delta, T_1], \quad N(T) > K.$$

Donc

$$\forall T \in [T_1 - \delta, T_1], \quad \frac{dN}{dT}(T) < 0.$$

Mais alors,

$$N(T_1) < N(T_1 - \delta),$$

ce qui contredit la définition de T_1 . Par l'absurde on en déduit que $\sup N \leq K$.

- **Cas 2.** On suppose que $N_0 \geq K$. Dans ce cas, tant que $N(t) \geq K$ on a, $\frac{dN}{dt} \leq 0$ donc, $N(t) \leq N_0$. Maintenant dès que l'on a $N(t) \leq 1$ on revient au cas précédent. Finalement $N(t) \leq \max(1, N_0)$ à tout instant.

Pour comprendre ce qu'il se passe lorsqu'on rajoute un effet Allee, il vaut mieux s'intéresser au taux de croissance *per capita* $\frac{N'}{N}$.

La valeur du taux de croissance *per capita* τ est donc :

$$\tau(N) = \frac{r}{K^2}(K - N)(N - N^*).$$

On a donc une parabole tournée vers le bas avec deux racines : N^* et K . On distingue alors deux cas :

- $N^* > 0$, on parle alors d'effet Allee fort, le taux de croissance par individu est négatif pour des faibles effectifs.
- $N^* < 0$, on parle alors d'effet Allee faible, le taux de croissance par individu est toujours positif mais diminue lorsque la population diminue.

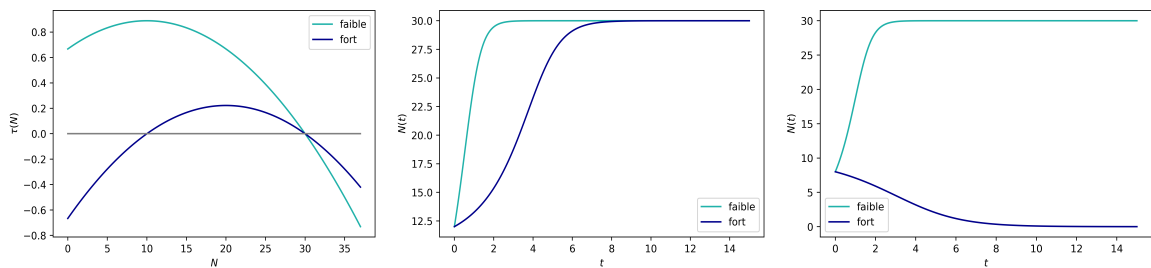


FIGURE 1 – Comparaison de la courbe $\tau(N)$ pour $r = 2$ et $K = 30$ avec $N^* = \pm 10$, et forme des solutions pour les conditions initiales $N(0) = 8$ et $N(0) = 12$.

Pour un effet Allee fort, on observe une inflexion lorsque la population atteint le maximum de la parabole. A partir de là, la population croît de moins en moins vite et τ tend vers 0, c'est-à-dire que la fonction N atteint sa valeur maximale K .

Dans la nature, l'effet Allee correspond à des facteurs qui font qu'une population a du mal à se développer pour des faibles populations, ce qui peut être dû à des contraintes biologiques comme la consanguinité, qui engendre la naissances d'individus stériles. Plus

surprenant, le fait qu'une espèce est déclarée rare ou en voie d'extinction peut amplifier l'effet Allee car l'être humain a tendance à chasser davantage l'animal en question.

On a deux points d'équilibre qui sont K et N^* . En calculant la dérivée de la fonction qui à N associe N' , on montre que le K est stable. Pour une population proche de K , la population va se stabiliser autour de K . *A contrario*, le point N^* est instable. Autrement dit, la population s'éteint pour une population inférieure à N^* , est se stabilise vers K pour une population supérieure à N^* .

1.2 Modèle de Lotka-Volterra

Les résultats et les preuves présentés ici proviennent pour la plupart de [IP19].

Maintenant, on va étudier le premier modèle proie-prédateur à avoir été étudié, et aussi le plus simple.

Les équations de prédation de Lotka-Volterra sont un système d'équations différentielles qui modélise la dynamique d'un système biologique à deux espèces : les proies et les prédateurs. On appelle d'ailleurs aussi ce modèle le modèle proie-prédateur.

Au temps t , on notera $x(t)$ l'effectif des proies et $y(t)$ l'effectif des prédateurs. Le système possède quatre paramètres, qui traduisent des données biologiques :

- α est le taux de reproduction intrinsèque des proies (indépendant du nombre de prédateurs).
- β est le taux de mortalité des proies dû aux prédateurs.
- γ est le taux de mortalité intrinsèque des prédateurs (indépendant du nombre de proies).
- δ est le taux de reproduction des prédateurs.

Ces quatre paramètres sont évidemment des réels strictement positifs. Ainsi, l'évolution du nombre de proies dépend de α , de β et du nombre de prédateurs. De même, l'évolution du nombre de prédateurs doit dépendre de δ , de γ et du nombre de proies. Ceci conduit donc aux équations suivantes :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(\alpha - \beta y(t)) \\ y'(t) = y(t)(\delta x(t) - \gamma) \end{cases}$$

Soit une condition initiale $(x_0, y_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ au temps 0 et on considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} (x, y)' = F(x, y) \\ (x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \end{cases}$$

La fonction F étant \mathcal{C}^1 , elle est localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable, et le théorème de Cauchy-Lipschitz garantit l'existence et l'unicité d'une solution maximale à ce problème de Cauchy.

Remarque 1. Comme $(0, 0)$ est solution du problème de Cauchy pour la donnée initiale $(0, 0)$ et que les trajectoires ne se croisent pas pour des données initiales différentes, on est sûrs que nos populations ne vont jamais s'éteindre.

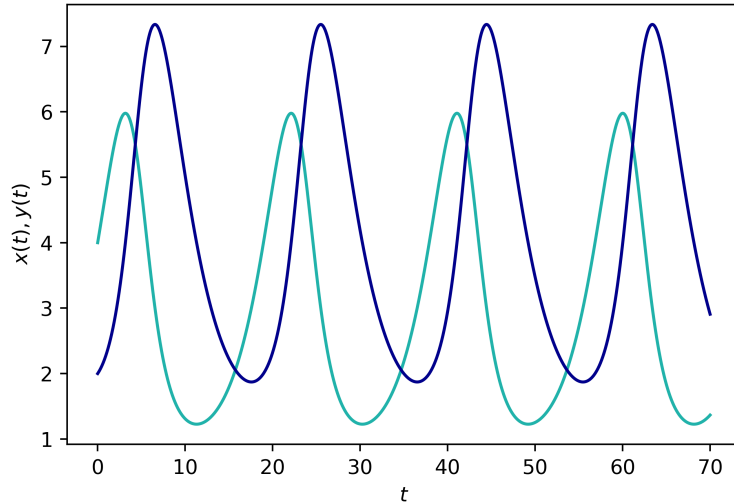


FIGURE 2 – Solution du problème pour $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (0,4, 0,1, 0,3, 0,1)$ et $(x_0, y_0) = (4, 2)$.

On présente en figure 1 les solutions de ces équations. Analysons ces résultats.

- d’abord, il y a assez peu de prédateurs pour que les proies se développent, et en parallèle, les prédateurs se développent également.
- ensuite, le nombre de prédateurs a assez augmenté pour que le nombre de proies commence à diminuer
- après, le nombre de proies a trop diminué, les prédateurs n’ont plus assez à manger, leur nombre baisse
- enfin, une fois que le nombre de prédateurs a assez baissé, les proies sont moins menacées et leur nombre augmente.

Les solutions semblent être périodiques.

1.2.1 Portrait de phase et équilibres

On peut montrer que le problème admet des solutions bornées donc globales (Annexe 1). Ceci traduit une réalité physique : il semblerait qu’une population d’animaux ne puisse pas tendre vers l’infini en temps fini.

Pour mieux visualiser ces quatre étapes, il est essentiel de tracer le portrait de phase des solutions (figure 3).

Les quatre points caractéristiques délimitent quatre quarts de plan. Chaque quart de plan correspond à des signes donnés de x' et y' , et on peut alors trouver les droites qui délimitent ces quarts de plan. En effet,

$$x'(t) > 0 \text{ si et seulement si } y(t) < \frac{\alpha}{\beta} \text{ et } y'(t) > 0 \text{ si et seulement si } x(t) > \frac{\gamma}{\delta}.$$

On en déduit que ces deux droites ont pour équation :

$$x = \frac{\gamma}{\delta} \text{ et } y = \frac{\alpha}{\beta}.$$

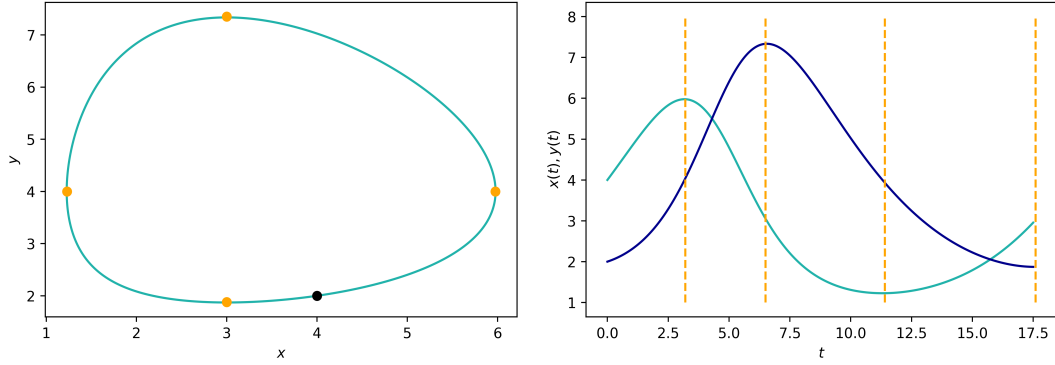


FIGURE 3 – Portait de phase et points caractéristiques avec les mêmes paramètres.

De plus, les signes des dérivées nous montre que le portrait de phase est parcouru dans le sens trigonométrique, donc notre système passe par les quatre quarts de plan dans le sens trigonométrique, ce qui correspond aux étapes que l'on avait listées dans la sous-section précédente. On a donc quantifié les quatre phases de l'évolution des populations présentées précédemment.

On a :

$$dF(0, 0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Une des valeurs propres est strictement négative, donc le point d'équilibre $(0, 0)$ est instable.

Par ailleurs :

$$dF\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-\beta\gamma}{\delta} \\ \frac{\alpha\delta}{\beta} & 0 \end{pmatrix},$$

dont le polynôme caractéristique est $X^2 + \alpha\gamma$. Les valeurs propres de la matrices sont donc $\pm i\sqrt{\alpha\gamma}$. On ne peut donc pas conclure avec les théorèmes généraux.

Cependant, les calculs précédemment menés avec la fonction H permettent de montrer que la fonction

$$V = H - H\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$$

est une fonction de Lyapounov pour le système, c'est-à-dire que V est positive que la quantité $\langle \nabla V(x, y), F(x, y) \rangle$ est négative ou nulle sur $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta} \right) \right\}$ (dans notre cas, elle est en fait identiquement nulle). Un théorème dû à LYAPOUNOV assure alors que ce point d'équilibre est stable.

1.2.2 Périodicité des solutions

Théorème 1. La solution du problème de Cauchy de Lotka-Volterra est périodique, et les périodes de x et y sont les mêmes.

La démonstration est donnée en Annexe 1.

Ce résultat est très précis ; on connaît le comportement de la population à partir du comportement sur une période, qui peut être déterminé numériquement. De plus, on peut simplement calculer les valeurs moyennes des populations ce qui est souvent la donnée recherchée. En effet, le mathématicien italien Vito VOLTERRA a mis au point ce modèle afin d'aider son beau-frère à comprendre pourquoi la population de sardines avait diminué pendant la Seconde Guerre Mondiale. Le modèle a permis d'expliquer comment l'ajout d'un prédateur commun (l'être humain) a pu faire augmenter le nombre moyen de proies (les sardines) et donc expliquer le phénomène.

En somme, ce premier modèle semble, par sa formulation comme par ses résultats, être légitime. On connaît relativement bien le comportement des solutions, on connaît toujours les deux équilibres et leur stabilité. Cependant, les situations réelles peuvent être plus compliquées ; il semble pertinent d'ajouter un terme d'effet Allee par exemple. Nous allons, dans la sous-section suivante, introduire le modèle étudié dans l'article de référence.

1.3 Modèle ratio-dépendant avec effet Allee

Commençons par le système d'équations :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dT} = Ng(N) - f(N, P)P \\ \frac{dP}{dT} = cf(N, P) - mP \end{cases} \quad (4)$$

- N représente le nombre de proies ;
- P représente le nombre de prédateurs ;
- $g(N)$ représente le taux de croissance des proies pour une population de taille N ;
- $f(N, P)$ le taux de mortalité dû aux prédateurs pour N proie et P prédateurs ;
- c est le coefficient d'utilisation des ressources ;
- m la taux de mortalité des prédateurs

C'est le système proie-prédateur générique. Les interprétations se font de la même manière que le modèle de Lotka-Volterra, à la différence que les coefficients ne sont plus constants. On va utiliser nos considérations précédentes sur l'effet Allee pour construire une fonction $g(N)$ réaliste :

$$g(N) := r \left(\frac{N - N^*}{K} \right) \left(1 - \frac{N}{K} \right) \quad (5)$$

Passons au choix de la fonction f . Dans le modèle de Lotka-Volterra la fonction f est linéaire en N . Pour affiner le modèle proie-prédateur, les scientifiques ont modifier la fonction linéaire $f(N)$ par des fonctions plus complexes. Mais en pratique, le nombre de prédateurs peut influencer la fonction f . Les premiers modèles étaient cependant trop complexes pour être étudiés mathématiquement, et c'est en 1989 que ARDITI et GINZBURG proposent un modèle simple de f *ratio-dépendant* de la forme suivante¹ :

$$f(N, P) := \frac{aN}{ahN + P} = \frac{aN/P}{ahN/P + 1} = f(N/P) \quad (6)$$

1. il est à noter que ce n'est pas la forme présente dans l'article de référence. En effet, les auteurs ont sûrement commis une erreur de report, la fonction qu'ils présentent ne correspond pas à la physique du problème.

Cette forme justifie la dénomination *ratio-dépendant*.

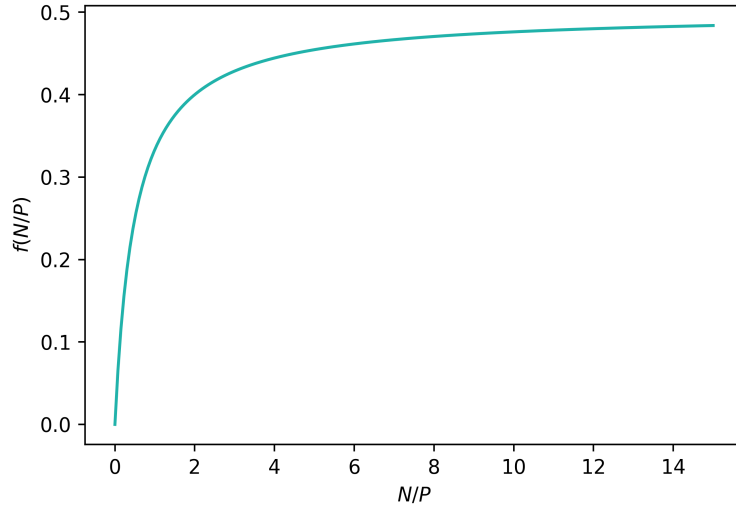


FIGURE 4 – Allure de la fonction f pour $a = 1$ et $h = 2$.

Les coefficients a et h ont les interprétations suivantes

- a est le taux d'attaque des prédateurs ;
- h est le temps de traitement des proies par les prédateurs.

Grossièrement on distingue deux cas limites

- Si $N \ll P$ alors on a $f(N, P) \approx \frac{aN}{P}$ de sorte que $f(N, P)P \approx aN$: le nombre de proies tuées correspond aux taux d'attaque fois le nombre de proie.
- Si $N \gg P$ alors on a $f(N, P) \approx h^{-1}$ de sorte que $f(N, P) \approx \frac{P}{h}$: le nombre de proies tuées correspond au nombre de prédateur divisé par le temps mis par un prédateur pour s'occuper de sa proie.

On obtient finalement le système d'équations

$$\begin{cases} \frac{dN}{dT} = sN(N - N^*) \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \frac{aNP}{ahN + P} \\ \frac{dP}{dT} = c \frac{aNP}{ahN + P} - mP \end{cases} \quad (7)$$

Afin de réduire le nombre de paramètres on introduit les variables adimensionnées

$$n := \frac{N}{K} \quad p := \frac{P}{ahK} \quad t := rKT$$

Puis les constantes

$$\alpha := \frac{a}{h} \quad \beta := acK \quad \vartheta := mKr$$

et enfin $n^* := \frac{N^*}{K}$. Ainsi le système se réécrit

$$\begin{cases} \frac{dn}{dt} = n(n - n^*)(1 - n) - \alpha \frac{np}{n + p} \\ \frac{dp}{dt} = \beta \frac{np}{n + p} - \vartheta p \end{cases} \quad (8)$$

Remarquons que ce système est très différent du modèle proie-prédateur classique. En effet, il se suffit pas de choisir des valeurs précises des constantes pour retomber dessus. La forme des solutions ne va donc pas être la même et n'aura *a priori* pas les mêmes propriétés. On observe tout type de comportement en mettant des paramètres au hasard (figure 5).

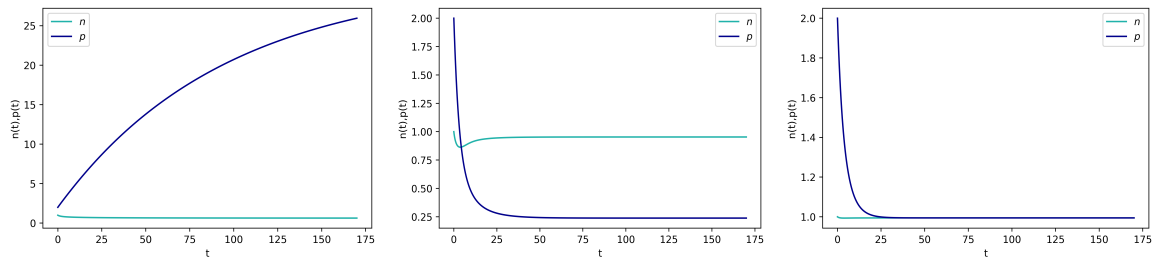


FIGURE 5 – Différents comportements du modèle ratio-dépendant avec effet Allee.

2 Théorie des bifurcations

Le modèle étant très compliqué, on ne cherche pas à étudier précisément ses solutions dans un cas général. Au lieu de cela, on cherche à délimiter des zones de l'espace des paramètres $(\alpha, \beta, n^*, \vartheta)$ en fonction de la forme des solutions. Si on prend deux jeux de paramètres dans la même région, alors les solutions se ressembleront. Dès lors, pour connaître le système en général, il reste à tracer les portraits de phase dans chacune des régions. La théorie utile pour faire cela est la théorie des bifurcations, dont nous présentons les bases dans cette partie.

2.1 Stabilité structurelle

2.1.1 Cadre d'étude

On étudie ici des équations différentielles de la forme

$$x' = f(x)$$

où $f \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R}^n)$ est un champ de vecteurs sur $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. On supposera dans toute la suite que les solutions de toutes les équations considérées sont globales. Si $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne et la norme subordonnée associée, on pose

$$\|f\| = \sup_{x \in E} \|f(x)\| + \sup_{x \in E} \|df(x)\| \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

C'est la norme \mathcal{C}^1 , qui rend complet l'espace des fonctions bornées $\mathcal{C}_b^1(E, \mathbb{R}^n)$. De plus, si $E = \mathbb{R}^n$, l'application linéaire $f \mapsto df$ est continue de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$.

2.1.2 Rappels sur le flot

Si on considère une équation différentielle ordinaire

$$x' = f(x)$$

avec une condition initiale en $t_0 \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^1$, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure qu'il existe une unique solution $y_{x_0}(t)$ maximale pour la condition initiale $x(t_0) = x_0$. Le *flot* de cette équation est alors défini par

$$\varphi = (\varphi_t)_t = (x_0 \mapsto y_{x_0}(t))_t.$$

On notera $\varphi_t(x)$ ou $\varphi(t, x)$.

On rappelle dans ce paragraphe quelques résultats sur le flot.

Proposition 2. On a, pour tout flot ψ , la *formule du flot* :

$$\forall t_1, t_2, \psi(t_1 + t_2, x) = \psi(t_1, \psi(t_2, x)). \quad (9)$$

Théorème 3. (Régularité du flot)

Si f est de classe \mathcal{C}^k alors pour tout t , φ_t également.

2.1.3 Équivalence topologique et stabilité structurelle

On considère toujours $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert.

Définition 1. Soient f et g deux champs de vecteurs sur E , et φ et $\psi : E \times \mathbb{R} \mapsto E$ les flots respectifs associés. On dit que f et g sont *topologiquement équivalents* (avec conservation de l'écoulement du temps) s'il existe h un homéomorphisme de E et τ une fonction continue bijective et strictement croissante du temps tels que

$$\forall t, \varphi_{\tau(t)} = h^{-1} \circ \psi_t \circ h.$$

Si l'un des deux flots est à valeurs hors de E , on dira que l'on n'a pas équivalence topologique.

En d'autres termes deux champs structurellement stables ont des solutions qui se ressemblent. L'idée de la stabilité structurelle est alors la suivante : est-ce que les solutions se ressemblent lorsque la fonction change légèrement ? On formalise cela dans la définition suivante.

Définition 2. On dit qu'un champ de vecteurs $f \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R}^n)$ est *structurellement stable* s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $g \in B(f, \varepsilon)$, f et g sont topologiquement équivalents sur E .

Remarque 2. Avec la définition donnée ci-dessus, il paraît plus simple de montrer qu'un champ n'est pas structurellement stable. En effet, il suffit pour cela de trouver des fonctions qui soient aussi proches de f que l'on veut, sans pour autant que les solutions possèdent une structure topologique similaire. De plus, on peut se restreindre à montrer l'instabilité sur un compact d'intérieur non vide inclus dans E .

Proposition 4. Soit un compact d'intérieur non vide $K \subset E = \mathbb{R}^n$. On suppose que le champ de vecteurs f n'est pas structurellement stable sur K . Alors il ne l'est pas sur E .

Démonstration. [Per92]

On suppose qu'on a des fonctions (f_n) définies sur K qui vérifient $\|f_n - f\|_K < \frac{1}{n}$ et qui ne sont pas topologiquement équivalentes à f . On peut alors les prolonger de manière \mathcal{C}^1 en une suite $(\tilde{f}_n)_n$ sur E de telle sorte à ce qu'il existe un compact $K' \subset E$ contenant K tel que le support de tous les (f_n) soit inclus dans K' et que l'on ait $\|f_n - f\| \leq \|\tilde{f}_n - f\|_{K'} < \|f_n - f\|_K + \frac{1}{n} \leq \frac{2}{n}$. Les prolongements ainsi obtenus ne sont pas topologiquement équivalents, sinon on pourrait prendre la restriction de l'homéomorphisme en question sur K et aboutir à une contradiction. En somme, la suite des prolongements montre que f n'est pas structurellement stable sur E . \square

Exemple 1. Commençons par un exemple trivial : le champ nul n'est jamais structurellement stable sur \mathbb{R}^n . En effet, les trajectoires des champs constants λI_n ne sont jamais bornées et on peut en trouver aussi proches de 0 que l'on le souhaite.

Exemple 2. Continuons avec un exemple plus compliqué, mais dont le principe est le même. Posons $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et l'équation :

$$(x', y') = (-y, x).$$

Qui correspond à l'équation du second ordre :

$$u'' = u.$$

Les trajectoires sont des cercles et donc bornées. Cependant, pour $\mu < 0$, l'équation

$$(x', y') = (-y + \mu x, x + \mu y)$$

admet un flot non topologiquement équivalent à celui pour $\mu = 0$. En effet, on peut montrer que, si on note ψ^μ le flot correspondant, on obtient que $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_t^0(1, 0)$ n'est pas définie alors que $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_t^\mu(x, y) = 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. En effet, le point d'équilibre $(0, 0)$ est asymptotiquement stable. Dès lors, si

$$\psi_{\tau(t)}^0 = h^{-1} \circ \psi_t^\mu \circ h,$$

on a

$$\psi_{\tau(t)}^0(1, 0) = h^{-1} \circ \psi_t^\mu(h(0, 1))$$

et l'asymptotique $t \rightarrow +\infty$ donne alors une contradiction.

De plus, pour μ suffisamment petit, les deux champs sont assez proches si on se restreint à la boule fermée centrée en 0 de rayon 2 par exemple. Celle-ci étant compacte, on sait que l'instabilité structurelle sur la boule entraîne celle sur \mathbb{R}^2 tout entier.

Par ailleurs, remarquons que pour $\mu > 0$, le point $(0, 0)$ est instable; les trajectoires s'éloignent de l'origine quand t tend vers l'infini. Autrement dit, lorsque μ traverse la valeur 0, le comportement du système change : c'est ce que l'on définira plus tard comme une valeur de *bifurcation*.

Remarque 3. En général, il est difficile de montrer que deux champs sont topologiquement équivalents, et donc encore plus difficile de montrer la stabilité structurelle d'un champ. Dans la sous-section suivante, on montre un résultat plus faible à propos de l'évolution des solutions lorsque l'on modifie légèrement le système.

2.1.4 Continuité des équilibres hyperboliques

Définition 3. Un point d'équilibre x_0 du système $x' = f(x)$ est dit *hyperbolique* lorsque les valeurs propres de la matrice $df(x_0)$ ont toutes des parties réelles non nulles.

Le théorème suivant énonce une forme de continuité des équilibres hyperboliques pour la norme $\|\cdot\|$.

Théorème 5. Soit f un champ de vecteurs \mathcal{C}^1 sur E qui présente un point d'équilibre hyperbolique x_0 . Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $g \in B(f, \delta)$, l'équation $y' = g(y)$ admette un point critique hyperbolique $y_0 \in B(x_0, \varepsilon)$ tel que $df(x_0)$ et $dg(y_0)$ aient le même nombre de valeurs propres de partie réelle positive.

Démonstration. On considère la fonction

$$\Psi : (g, x) \longmapsto g(x).$$

Cette fonction est \mathcal{C}^1 sur $\mathcal{C}^1(E, \mathbb{R}^n) \times E$, avec

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(f, x_0) = df(x_0) \in \text{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Comme $\mathcal{C}^1(E, \mathbb{R}^n)$ est complet pour $\|\cdot\|$, on peut appliquer le théorème des fonctions implicites qui garantit l'existence d'un voisinage U de f , d'un voisinage V de x_0 , et d'une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1(V, U)$ tels que

$$((g, x) \in U \times V \text{ et } \Psi(g, x) = g(x) = 0) \text{ si et seulement si } (x \in V \text{ et } x = \varphi(g)).$$

Soit alors $\varepsilon > 0$. Par continuité de φ , il existe un $\delta > 0$ tel que $\varphi(B(f, \delta)) \subset B(x_0, \varepsilon)$. De plus, par continuité de la différentielle et des valeurs propres, on peut choisir ce δ assez petit de telle sorte à ce que les différentielles des éléments g de $B(f, \delta)$ en $\varphi(g)$ aient le même nombre de valeurs propres de partie réelle positive que $df(x_0)$. \square

2.1.5 Systèmes linéaires

Définition 4. Un système linéaire $x' = Ax$ est structurellement stable *linéairement* s'il existe un voisinage de A dans l'espace des matrices où tous les systèmes correspondants sont topologiquement équivalents à $x' = Ax$.

Définition 5. Une matrice est dite *hyperbolique* lorsque ses valeurs propres ont toutes une partie réelle non nulle.

Théorème 6. Critère linéaire d'équivalence topologique

Soient A et B deux matrices réelles. Les systèmes $x' = Ax$ et $x' = Bx$ sont topologiquement équivalents si et seulement si A et B sont topologiques, avec le même nombre de valeurs propres de partie réelle positive.

Ce théorème est démontré dans [AC92]. On en déduit le théorème suivant :

Théorème 7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A est hyperbolique si et seulement si $x' = Ax$ est structurellement stable linéairement.

On peut regarder ce qu'il se passe en dimension 1 pour commencer à comprendre.

Soit φ le flot associé à $x' = \lambda x$ et ψ le flot associé à $x' = (\lambda + \varepsilon)x$ pour $0 < |\varepsilon| < \lambda$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \varphi(x, t) = xe^{\lambda t} \text{ et } \psi(x, t) = xe^{(\lambda + \varepsilon)t}.$$

Si on pose $\tau(t) = (1 + \frac{\varepsilon}{\lambda}t)$, qui est une fonction strictement croissante et continue du temps, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \varphi(x, \tau(t)) = \psi(x, t).$$

Donc en prenant $h = \text{id}$, on montre que les deux champs sont topologiquement équivalents. Comme $]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[$ constitue un voisinage de λ dans $\mathbb{R} = \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, on conclut que le champ λ est structurellement stable sur \mathbb{R} .

Démonstration. Le sens direct découle du critère 6, et de la continuité des valeurs propres.

Montrons la réciproque. Considérons une matrice A qui possède une valeur propre $\lambda = i\omega, \omega \in \mathbb{R}$. On suppose, quitte à changer de base, que notre matrice est sous forme de Jordan. En particulier, il existe un $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que la colonne j de la matrice A soit $(0, \dots, 0, i\omega, 0, \dots, 0)$, où le $i\omega$ est en position j . Si on considère le vecteur e_j de la base canonique, on a, si φ est le flot associé :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(e_j, t) = e^{i\omega t} e_j.$$

On a donc une trajectoire périodique. Maintenant, considérons un ε strictement positif suffisamment petit pour que la matrice $A + \varepsilon I_n$ soit hyperbolique. Si on note ψ le flot associé, on a, pour τ strictement croissante sur \mathbb{R} et continue bijective :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall k, \psi(e_k, \tau(t)) = e^{\varepsilon_k \tau(t)} e^{i\omega_k \tau(t)} e_k + u_k(t), \omega_k \in \mathbb{R}, \varepsilon_k \notin i\mathbb{R}, u_k(t) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1}).$$

En particulier, cette trajectoire n'est bornée pour aucun k , et par linéarité, aucune trajectoire n'est bornée si ce n'est la trajectoire nulle. Ainsi, notre trajectoire bornée ne pourra jamais être envoyée par un homéomorphisme sur une trajectoire du système perturbé. On en déduit que notre système n'est pas structurellement stable. \square

Corollaire 8. Soit A une matrice non hyperbolique. Alors $x' = Ax$ n'est pas structurellement stable.

Démonstration. On peut trouver des matrices hyperboliques aussi proches de A que l'on veut pour la norme sur \mathcal{C}^1 . \square

Un théorème fondamental établit l'équivalence topologique entre un système et son linéarisé autour d'un point d'équilibre hyperbolique, il s'agit du théorème de Hartman-Grobman. Ce théorème permet de lier la théorie des systèmes linéaires avec les systèmes généraux.

Théorème 9. (Hartman-Grobman)

Soit f un champ de vecteurs qui possède un point d'équilibre hyperbolique x_0 . Alors les systèmes $x' = f(x + x_0)$ et $x' = df(x_0)(x)$ sont topologiquement équivalents sur un voisinage de 0. Si jamais f n'est pas défini autour de 0, cela revient à considérer un homéomorphisme d'un voisinage de U dans un voisinage de 0.

Démonstration. Des éléments de preuve peuvent être trouvés dans [Per92], p.117. On construit l'homéomorphisme de manière implicite, par une méthode de point fixe. \square

Corollaire 10. Soit f un champ de vecteurs \mathcal{C}^1 qui présente un point d'équilibre hyperbolique x_0 . Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $g \in B(f, \delta)$ il existe $y_0 \in B(x_0, \varepsilon)$ tel que $x' = f(x + x_0)$ et $y' = g(y + y_0)$ soient topologiquement équivalents sur un voisinage de 0 (ou alors qu'ils soient équivalents par un homéomorphisme qui est défini d'un voisinage de x_0 dans un voisinage de y_0 et qui vérifie $h(x_0) = y_0$).

Démonstration. Soit $r > 0$ tel que pour tout $M \in B(df(x_0), r)$, les systèmes $x' = Mx$ et $x' = df(x_0)$ soient topologiquement équivalents. Un tel r existe d'après le théorème 2. Par la continuité de l'application $(g, x) \mapsto dg(x)$ (conséquence immédiate de 2.1.1), il existe $\delta_2 > 0$ et $\eta > 0$ tels que :

$$\forall g \in B(f, \delta_1), \forall y \in B(x_0, \eta), \|dg(y) - df(x)\| \leq r.$$

De plus, d'après le théorème de continuité des équilibres, il existe $\delta_2 > 0$ tel que pour tout $g \in B(f, \delta_2)$, il existe un point d'équilibre hyperbolique de $y' = g(y)$ dans la boule $B(x_0, \min(\eta, \varepsilon))$. Ainsi, pour $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, on peut appliquer Hartman-Grobman aux deux systèmes $x' = f(x)$ et $y' = g(y)$ qui possèdent comme points d'équilibre respectifs x_0 et y_0 : $x' = f(x + x_0)$ et $x' = df(x_0)x$ sont topologiquement équivalents sur un voisinage de 0 d'une part, et $y' = g(y + y_0)$ et $y' = dg(y_0)y$ sont topologiquement équivalents sur un voisinage de 0 d'autre part. Comme on a

$$\|dg(y_0) - df(x_0)\| \leq r,$$

on sait que ces deux systèmes sont topologiquement équivalents. On a donc le résultat par transitivité. \square

On peut visualiser ce résultat sur le diagramme figure 6.

$$\begin{array}{ccc}
 df(x_0) & \xleftarrow{\mathbb{R}^n} & dg(y_0) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 V & & V \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 f(\cdot + x_0) & \xleftarrow{V} & g(\cdot + y_0)
 \end{array}$$

FIGURE 6 – Diagramme illustrant la preuve du corollaire 10. Les flèches représentent une équivalence topologique sur l'ensemble indiqué. V désigne un voisinage de 0.

Ce corollaire invite à définir une nouvelle forme de stabilité structurelle.

Définition 6. Un système f est dit *Andronov-structurellement stable* dans un ouvert D_0 s'il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout $g \in B(f, \delta)$, il existe des ouverts U et V avec $D_0 \subset U$ les systèmes f et g soient topologiquement équivalents sur U et V (l'homéomorphisme en question est défini de U dans V). On dit que f est Andronov-structurellement stable au voisinage de x_0 s'il existe D tel que f soit Andronov-structurellement stable dans tout voisinage de x_0 inclus dans D .

Remarque 4. La stabilité structurelle entraîne la stabilité structurelle au sens d'Andronov.

Notre corollaire dit donc qu'un système est Andronov-structurellement stable au voisinage d'un point d'équilibre hyperbolique.

2.2 Définition d'une bifurcation

On considère maintenant une équation différentielle à paramètre, *i.e.* une équation de la forme

$$x' = f(x, \mu), \mu \in \mathbb{R}^k.$$

La plupart du temps, on aura $k = 1$. On supposera toujours $f \in \mathcal{C}^1$.

Définition 7. Une valeur μ_0 pour laquelle le système $x' = f(x, \mu_0)$ n'est pas structurellement stable est appelée *bifurcation*. Si on perd uniquement la stabilité structurelle au sens d'Andronov au voisinage d'un point x_0 , on dira que μ_0 est une *bifurcation locale* en x_0 .

Remarque 5. La plupart des livres définissent une bifurcation comme ci-dessus, mais se permettent d'affirmer qu'il n'y a pas de bifurcation en un point μ_0 en vérifiant seulement la stabilité structurelle au voisinage d'un point x_0 ([HK91],[Kuz14]). Il nous a alors paru commode d'effectuer le distinguo entre les deux notions. Dans tous les cas que l'on va traiter, il s'avère que les bifurcations dont nous allons parler sont locales (ce qui est une notion plus forte). Cependant, il est possible que l'on ait une valeur de bifurcation μ_0 telle qu'il existe un point d'équilibre qui ne présente pas de bifurcation locale. Malgré cela, dans la suite, on confondra les deux notions.

2.3 Bifurcations et points d'équilibre

La bifurcation correspond à une modification de l'état du système. Les premiers éléments qui peuvent caractériser un système sont les points d'équilibre. Leur étude et celle des bifurcations sont profondément liées par le théorème suivant, qui découle du corollaire 10.

Théorème 11. Soit x_0 un point d'équilibre hyperbolique de $x' = f(x, \mu_0)$. Alors μ_0 n'est pas une bifurcation locale en x_0 .

Remarque 6. Ce résultat peut se voir à l'aide du théorème des fonctions implicites (on comprendra encore mieux ce lien après le théorème de caractérisation), puisque l'on sait que les équilibres x_0 de $x' = f(x, \mu)$ peuvent s'écrire $x_0(\mu)$ au voisinage de μ_0 . Donc on n'a que des équilibres qui ressemblent à celui en μ_0 , et on imagine alors difficilement qu'il puisse y avoir bifurcation.

Ce théorème nous invite à chercher des bifurcations aux points d'équilibre non hyperboliques, et à chercher des valeurs des paramètres pour lesquels la nature des équilibres change. Un résultat relatif à la dimension 1 présenté *infra* précisera ce propos.

Exemple 3. Si on considère $f(x, \mu) = \mu x \in \mathbb{R}$, alors la valeur $\mu = 0$ est une bifurcation.

Dans les systèmes physiques, passer par une bifurcation conduit à une modification des propriétés du système. Par exemple, si on place une bille qui coulisse le long d'un anneau en rotation sans frottements et que l'on regarde le système en fonction de ω , on remarque que pour ω assez grand, la bille qui était en bas de l'anneau va se "coller" sur le côté de l'anneau car la force axifuge va devenir prépondérante (figure 7). L'équilibre stable de la bille a changé, il y a eu bifurcation. Cette analogie avec la physique permet d'entrevoir ce qu'il peut se passer pour les systèmes proie-prédateur : une légère modification des paramètres (environnementaux par exemple) peut engendrer des modifications drastiques dans la dynamique des population : changer la stabilité de certains équilibres, ou encore en faire apparaître des nouveaux.

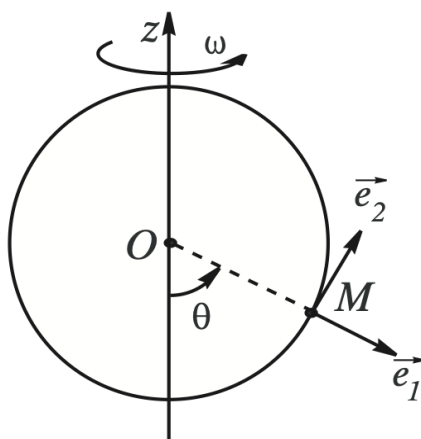


FIGURE 7 – Schéma de l'expérience. Ici la force axifuge est assez élevée pour maintenir la bille sur le côté de l'anneau.

Remarque 7. Pour qu'un point d'équilibre hyperbolique ne le soit plus, on a deux cas de figure : soit une valeur propre devient nulle, cela considère une dimension, c'est pour cela

que l'on va étudier les bifurcations en une dimension ; soit un couple de valeurs propres traverse la droite $i\mathbb{R}$ simultanément, auquel cas on parle de bifurcation de Hopf². Cela conduit à l'étude des bifurcations en dimension 2. Par ailleurs, comme le modèle proie-prédateur est un modèle en dimension 2, il y a trois cas de figure précis : la bifurcation simple où une unique valeur propres devient nulle, la bifurcation de Hopf, et la bifurcation de Bogdanov-Takens, qui correspond au passage simultané des deux valeurs propres par l'origine. Nous n'étudierons pas ici ce dernier cas, bien trop complexe pour notre projet.

2.4 Bifurcations en dimension 1

2.4.1 Critère d'équivalence et forme normale

On considère ici une fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}),$$

ainsi que l'équation

$$x' = f(x, \mu).$$

On rappelle le théorème des fonctions implicites en dimension 2.

Théorème 12. (fonctions implicites)

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Soient x_0 et μ_0 deux réels tels que :

$$f(x_0, \mu_0) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \mu_0) \neq 0.$$

Alors il existe $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ et une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1(] \mu_0 - \varepsilon, \mu_0 + \varepsilon[,] x_0 - \delta, x_0 + \delta[)$ tels que $((\mu, x) \in] \mu_0 - \varepsilon, \mu_0 + \varepsilon[\times] x_0 - \delta, x_0 + \delta[\text{ et } f(x, \mu) = 0) \Leftrightarrow (x \in] x_0 - \delta, x_0 + \delta[\text{ et } x = \varphi(\mu))$.

Ce théorème a une application importante pour nos bifurcations. En effet, il justifie non seulement qu'il faille chercher des bifurcations là où l'on a des points critiques non hyperboliques (ce que l'on savait déjà), mais aussi où se trouvent les points d'équilibre hyperboliques à proximité d'un point hyperbolique donné (le théorème fournit directement une formule pour la dérivée de φ). En fait, il existe un résultat plus fort qui permet de justifier le lien entre les équilibres et les bifurcations, que nous allons établir maintenant.

Définition 8. On dit que deux fonctions $f, g : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ où I est un intervalle ont la même *structure orbitale* lorsqu'elles ont le même nombre fini de zéros, que l'on note par ordre croissant $-\infty = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = +\infty$ et $-\infty = y_0 < y_1 < \dots < y_n < y_{n+1} = +\infty$, et que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, les fonctions f et g ont même signe sur $[x_i, x_{i+1}]$ et $[y_i, y_{i+1}]$.

Théorème 13. (critère d'équivalence topologique en dimension 1)

Soient deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ qui ont chacune un nombre fini de zéros, et telles que les équations différentielles associées admettent toujours des solutions globales. Alors elles sont topologiquement équivalentes si et seulement si elles ont la même structure orbitale.

2. Ce n'est pas la définition de la bifurcation de Hopf, que l'on verra plus tard

Démonstration. *Le sens direct, le résultat du lemme et l'idée de l'homéomorphisme proviennent de [HK91]. Le reste de la preuve, en particulier la démonstration du lemme, est personnel.*

Si les flots associés à f et g sont topologiquement équivalents, alors l'homéomorphisme correspondant envoie les points d'équilibre sur les points d'équilibre. Soient donc x_0 et y_0 deux points d'équilibre respectifs de f et g . On suppose que f est décroissante au voisinage de x_0 et que g est croissante au voisinage de y_0 . Alors, si h est un homéomorphisme qui convient, soit il est croissant dans ce cas, si $x > x_0$ (où x est plus petit que le prochain zéro de f), alors $h(x) > y_0$, et la trajectoire partant de x revient vers x_0 , tandis que celle partant de y part vers le point d'équilibre de g situé à droite de y_0 , ce qui n'est pas. Si h est décroissant, alors on a une contradiction similaire, où la solution partant de y va vers le zéro à gauche. On a donc le résultat par contraposition.

Réciproquement, on suppose que l'on a la même structure orbitale et on pose $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ les zéros respectifs de f et g classés par ordre croissant. On choisit alors des réels $\alpha_1 < \dots < \alpha_{n+1}$ et $\beta_1 < \dots < \beta_{n+1}$ entrelacés dans les zéros de f et g :

$$\alpha_1 < x_1 < \alpha_2 < \dots < x_n < \alpha_{n+1} \text{ et } \beta_1 < y_1 < \beta_2 < \dots < y_n < \beta_{n+1}.$$

On note φ et ψ les flots respectifs de f et g . Soit $x_0 < x_1$. On va montrer un lemme qui va permettre de définir notre homéomorphisme. On construit ensuite l'homéomorphisme sur $] -\infty, x_1]$, et on suppose, sans perte de généralité, que f (et donc g) est négative sur cet intervalle.

Lemme. Il existe un unique $t(x_0)$ tel que $\varphi(t(x_0), x_0) = \alpha_1$.

Démonstration du lemme. Considérons d'abord $x_0 > \alpha_1$. Comme f est négative sur $] -\infty, x_1]$, la solution $\varphi(x_0, \cdot)$ est strictement décroissante (et non nulle car la fonction nulle est solution pour $x_0 = x_1$), et il faut donc chercher $t(x_0)$ positif. Comme la solution est décroissante, elle converge. Si c'est vers une limite finie, alors l'expression sous forme intégrale du problème de Cauchy montre une contradiction. Alors la solution tend vers $-\infty$ et le théorème des valeurs intermédiaires fournit le $t(x_0)$ voulu. On suppose maintenant $x_0 < \alpha_1$, et on doit donc chercher dans les temps négatifs. Par le même raisonnement, a une limite finie, qui est forcément 0 par un argument similaire à l'autre cas.

L'unicité découle de la décroissance donc de la bijectivité de la solution sur l'intervalle considéré. On fait pareil si f est positive sur cet intervalle et on peut procéder de même pour les autres intervalles.

On pose alors

$$h(x_0) = \psi(-t(x_0), \beta_1).$$

Comme $t(x_0)$ est unique, la fonction h est bien définie. De plus, comme φ est continue, t l'est aussi (*on peut le voir par la contraposée*) et h est continue par continuité du flot ψ . t est strictement croissante, $\psi(\cdot, \beta_1)$ est strictement décroissante donc h est strictement monotone par composée. De plus (cf. preuve du lemme) h a pour limite x_1 en $-\infty$ (les solutions tendent vers 0) et $+\infty$ en $+\infty$ (les solutions divergent en $+\infty$). Par symétrie, on aurait pu aussi définir d'abord h^{-1} , qui est donc continu, et h définit donc un homéomorphisme.

Comme la fonction t est par construction strictement croissante, le sens des trajectoires est préservé. Remarquons que comme φ et ψ ont des rôles symétriques, on aurait pu

procéder dans l'autre sens et définir alors d'abord h^{-1} , qui est donc continu. En posant $h(x_1) = y_1$, on a donc un homéomorphisme sur $] -\infty, x_1]$. De plus, pour tout $x \in] -\infty, x_1]$, par la formule du flot (9) :

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, h(\varphi(\tau, x)) = \psi(-t(\varphi(\tau, x)), \beta_1) \text{ et } \psi(\tau, h(x)) = \psi(\tau, \psi(-t(x), \beta_1)) = \psi(\tau - t(x), \beta_1).$$

Ainsi, pour que h envoie les trajectoires d'un système sur les trajectoires de l'autre, il suffit que l'on ait :

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, -t(\varphi(\tau, x)) = \tau - t(x) \text{ soit } t(x) = \tau + t(\varphi(\tau, x)).$$

Et cette dernière égalité est vraie. En effet, si on fixe $\tau \in \mathbb{R}$, on a :

$$\varphi(\tau + t(\varphi(\tau, x)), x) = \varphi(t(\varphi(\tau, x)), \varphi(\tau, x)) = \alpha_1.$$

Par unicité dans le lemme, on a bien le résultat. Notre homéomorphisme h convient bien. On le construit de la même manière sur les autres intervalles : pour $[x_n, +\infty[$, c'est symétrique au cas que l'on a fait, et pour les segments cela revient à avoir deux fois le raisonnement pour une borne finie qui est fait dans la deuxième partie de la démonstration du lemme. \square

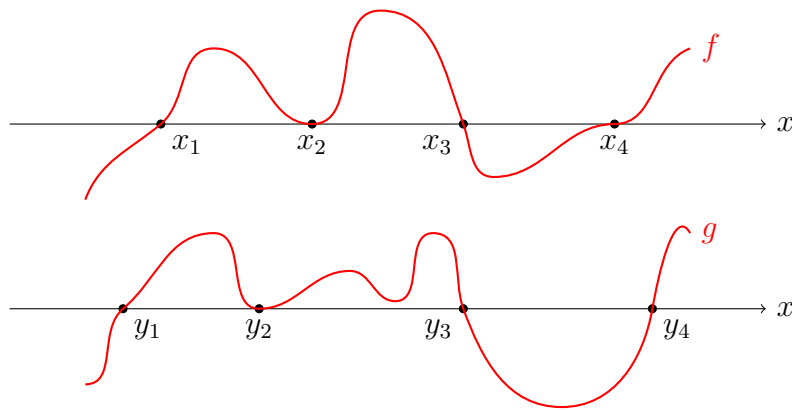


FIGURE 8 – Deux fonctions f et g ayant la même structure orbitale, et donc les systèmes associés sont donc topologiquement équivalents.

Ce théorème montre en particulier que si le nombre d'équilibres n'est pas le même en μ_0^+ et en μ_0^- , ou que s'il n'est pas le même en μ_0 et en son voisinage, alors il y a une bifurcation en μ_0 .

On est de plus en mesure de classifier l'équivalence topologique en dimension 1 pour les fonctions qui ont un nombre fini de point d'équilibre.

Corollaire 14. (forme normale)

Soit f une fonction \mathcal{C}^1 . Alors il existe une fonction polynomiale p telle que la classe d'équivalence de f pour la relation d'équivalence topologique sur un intervalle contenant tous les zéros de f soit celle de p . On dit que p est une *forme normale* de f .

Il convient alors de s'intéresser en particulier aux bifurcations de la forme :

$$x' = p(x, \mu), p \in \mathbb{R}[x, \mu].$$

Nous le ferons dans la sous-section suivante.

2.4.2 Diagrammes de bifurcation

D'après le théorème sur les formes normales, on a donc vu que l'on ne peut s'intéresser qu'à des diagrammes particuliers. Quitte à faire un développement limité en μ , on prendra des polynômes en μ également. Voici les trois diagrammes principaux ; ceux que l'on rencontre le plus souvent dans les modèles (que ce soient des modèles de population ou des modèles physiques en général).

Définition 9. On appelle *diagramme de bifurcation* le tracé dans le plan (μ, x) des équilibres de $x' = f(x, \mu)$. Souvent, on trace en pointillés les équilibres instables et en trait plein les équilibres stables.

Bifurcation nœud-selle

On s'intéresse à l'équation :

$$x' = f(x, \mu) = \mu - x^2.$$

Pour $x < 0$, on n'a pas d'équilibre, et on en a deux pour $x \geq 0$ (un double si $x = 0$) qui sont $\pm\sqrt{\mu}$. On en déduit donc que $(0, 0)$ est une valeur de bifurcation, et on peut tracer le diagramme (Figure 9).

Bifurcation transcritique

La bifurcation transcritique est une autre bifurcation classique, que l'on observe pour l'équation :

$$x' = \mu x - x^2.$$

Il est facile de trouver les équilibres, et on donne en Figure 9 le diagramme de bifurcation.

Bifurcation en fourche (*pitchfork bifurcation*)

La bifurcation en fourche est notamment observée pour l'équation :

$$x' = \mu x - x^3.$$

On trouve les mêmes équilibres que pour la bifurcation nœud-selle, et en plus l'équilibre 0. Il est à noter que les stabilités diffèrent. On donne le diagramme en Figure 9.

Justification de l'utilité de la forme normale par un exemple.

Reprenons l'exemple physique donné *supra*. L'application de la seconde loi de Newton dans le référentiel de l'anneau en rotation à la vitesse angulaire ω montre que la recherche des équilibres revient à trouver les équilibres de :

$$\theta' = (\alpha \cos \theta - 1) \sin(\theta),$$

où $\alpha = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$, ω_0 ne dépendant que des paramètres du système. On retrouve, pour α au voisinage de 1, les mêmes types d'équilibres que la bifurcation en fourche. D'après le théorème de classification (13), on sait que les diagrammes se ressemblent (au moins au voisinage de 0). On peut constater cela effectivement en observant les diagrammes (Figure 10).

On peut encore voir cette analogie avec le calcul suivant, effectué au voisinage de 0, avec $\mu = \alpha - 1$:

$$(\alpha \cos \theta - 1) \sin(\theta) \simeq \alpha \theta \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) - \theta = (\mu + 1) \frac{\theta^3}{2} - \mu \theta \simeq \frac{\mu}{2} \theta^3 - \mu \theta.$$

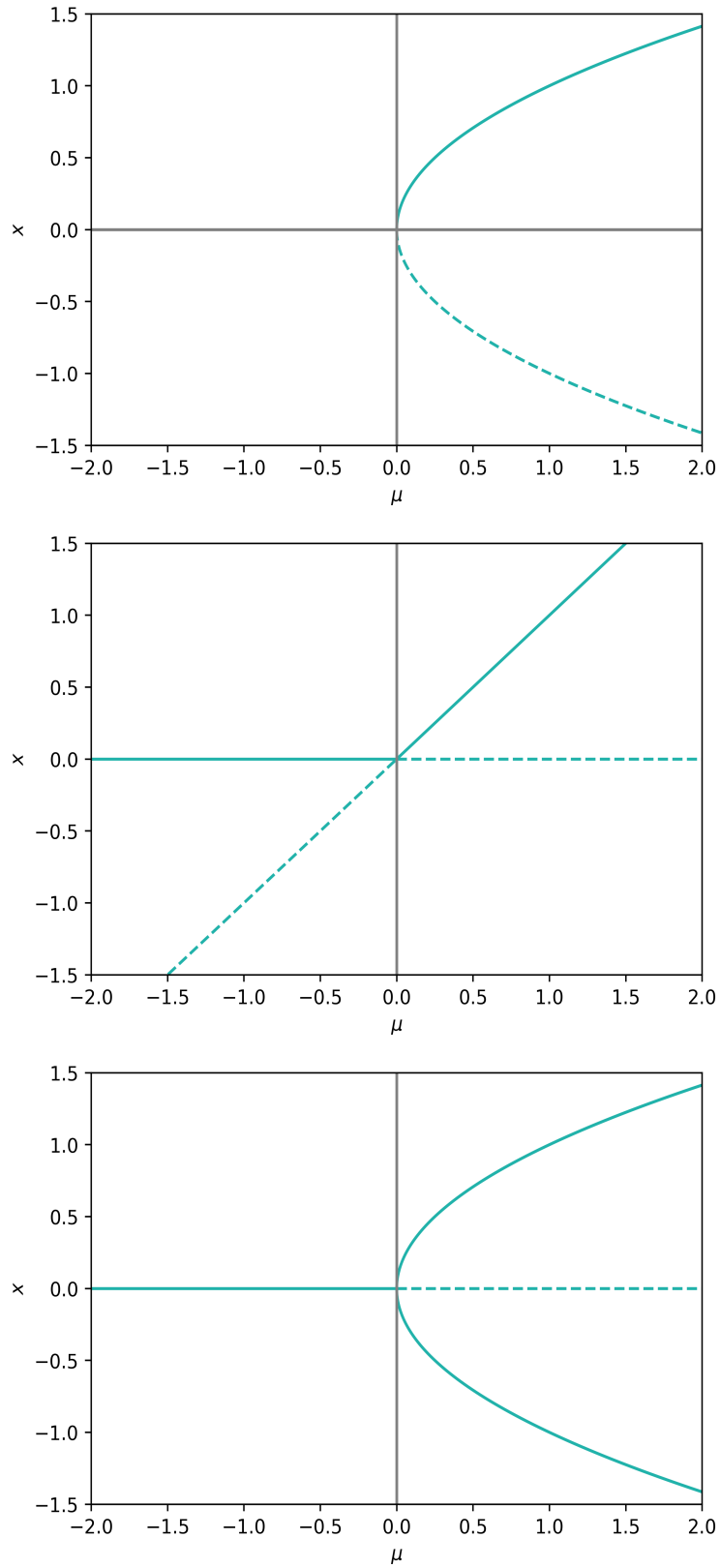


FIGURE 9 – Bifurcations nœud-selle, transcritique, et en fourche (de haut en bas).

Ainsi, cela laisse à penser que les systèmes

$$\theta' = (\alpha \cos \theta - 1) \sin(\theta) \text{ et } \theta' = \frac{\mu}{2} \theta^3 - \mu \theta$$

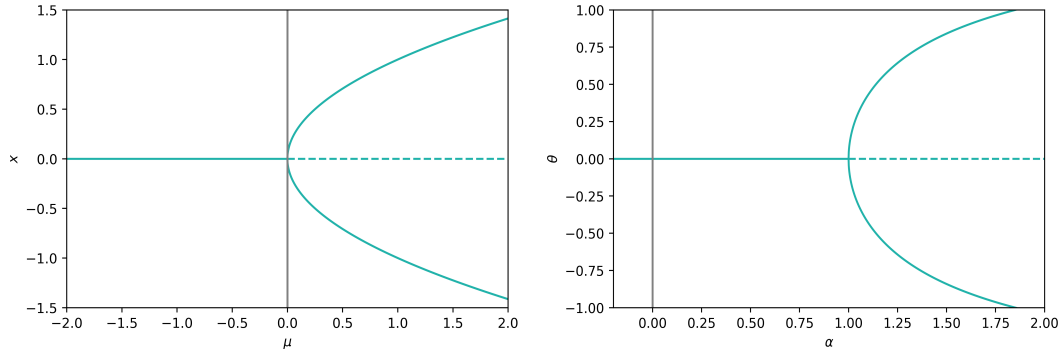


FIGURE 10 – Comparaison de notre système physique avec sa forme normale.

se comportent de la même manière pour μ proche de 0. Or pour ce deuxième système, il est évident que nous avons à faire à une bifurcation en fourche.

2.5 Théorème de Sotomayor

En dimension 1, la classification des bifurcations est assez simple, dans le sens où on peut étudier les formes normales (qui sont simples) et connaître les types de bifurcation. Dès la dimension 2, c'est beaucoup moins évident. On considère dans cette sous-partie une équation de la forme :

$$x' = f(x, \mu), x \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}.$$

Le théorème de Sotomayor fournit des informations sur les bifurcations aux points d'équilibre hyperboliques simples, c'est-à-dire où la valeur propre nulle est simple.

Théorème 15. (de Sotomayor)

Soit (x_0, μ_0) tel que $f(x_0, \mu_0) = 0$. Notons

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \mu_0) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On suppose que 0 est valeur propre simple de A , et que A possède k valeurs propres de partie réelle négative. On note v et w deux vecteurs propres de A associés à la valeur propre 0, respectivement à droite et à gauche.

— Si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\langle w, \nabla_{\mu} f(x_0, \mu_0) \rangle \neq 0 \text{ et } \left\langle w, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, \mu_0)(v, v) \right\rangle \neq 0 \quad (10)$$

Il y a une courbe lisse de points d'équilibre du système dans \mathbb{R}^{n+1} qui passe par (x_0, μ_0) et tangente à l'hyperplan $\mathbb{R}^n \times \{\mu_0\}$. Proche de x_0 , il y a deux points d'équilibre hyperboliques pour $\mu > \mu_0$ ou $\mu < \mu_0$ selon le signe des quantités dans 10. On a une bifurcation nœud-selle en (x_0, μ_0) . Le diagramme de bifurcation est le même qu'en dimension 1, si on le trace dans la direction de v .

— Si ces conditions sont satisfaites :

$$\langle w, \nabla_{\mu} f(x_0, \mu_0) \rangle = 0, \left\langle w, \frac{\partial(\nabla_{\mu} f)}{\partial x}(x_0, \mu_0)(v) \right\rangle \neq 0 \text{ et } \left\langle w, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, \mu_0)(v, v) \right\rangle \neq 0, \quad (11)$$

alors on a le même résultat, mais pour une bifurcation transcritique.

— Si ces conditions sont satisfaites :

$$\begin{aligned} \langle w, \nabla_{\mu} f(x_0, \mu_0) \rangle = 0, \quad \left\langle w, \frac{\partial(\nabla_{\mu} f)}{\partial x}(x_0, \mu_0)(v) \right\rangle \neq 0, \\ \left\langle w, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, \mu_0)(v, v) \right\rangle = 0 \text{ et } \left\langle w, \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0, \mu_0)(v, v, v) \right\rangle \neq 0, \end{aligned} \quad (12)$$

alors on a la même chose pour une bifurcation de fourche.

Remarque 8. On n'a pas de courbe lisse d'équilibres dans les deux derniers cas, on l'a montré en dressant les diagrammes en dimension 1.

Ce théorème justifie donc l'étude des bifurcations à une dimension avant celle dans les dimensions supérieures. Appliquons-le à l'exemple :

$$(x', y') = (\mu - x^2, -y).$$

On considère les valeurs $\mu_0 = 0$ et $x_0 = 0$, on a donc :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \nabla_{\mu} f(0, 0) = (1, 0)$$

Ainsi, en prenant $w = v = (1, 0)$, on satisfait les conditions (10). Ainsi, on a une bifurcation nœud-selle en 0 et on voit le diagramme dans le plan (μ, v) , ce qui veut dire que si on trace le diagramme de :

$$g : (t, \mu) \mapsto \langle f((x_0, \mu_0) + tv, \mu), v \rangle,$$

on doit observer le diagramme nœud-selle de la figure 9.

En effet, c'est ce que l'on observe puisque $g(t, \mu) = \mu - t^2$.

2.6 Bifurcation de Hopf

2.6.1 Cycle limite

Soit $f : \Omega \rightarrow E$. On considère le système

$$x' = f(x) \quad (13)$$

où l'on postule l'existence et l'unicité de solutions maximales.

Dans la suite $E = \mathbb{R}^n$.

Définition 10. On dit que $x \in \mathbb{R}^n$ est un ω (resp. α) *point limite* d'une trajectoire T lorsqu'il existe $y \in T$ tel que que x soit une valeur d'adhérence en $+\infty$ (resp. $-\infty$) de la fonction $t \mapsto \varphi_t(y)$.

Définition 11. La ω (resp. α) *limite* d'une trajectoire T est l'ensemble des points limites d'un point quelconque de cette trajectoire.

Cette définition ne dépend pas du point choisi d'après la *formule du flot*.

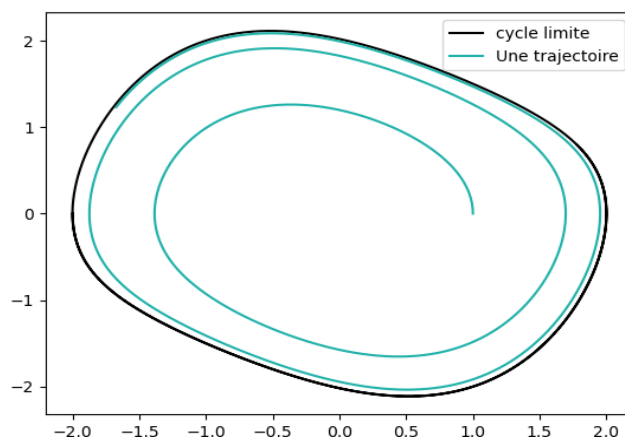


FIGURE 11 – Oscillateur de Van der Pol pour $\varepsilon = \frac{1}{3}$.

Définition 12. On appelle *cycle-limite* toute trajectoire périodique qui est la limite d'ensemble d'au moins une autre trajectoire.

Pour illustrer la notion de cycle limite nous prenons l'exemple de l'*oscillateur de Van Der Pol*

$$x'' + \varepsilon(x^2 - 1)x' + x = 0 \quad (14)$$

que l'on réécrit comme un système du premier ordre en posant $y = -x'$

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x - \varepsilon(x^2 - 1)y \end{cases} \quad (15)$$

Cette équation décrit l'évolution temporelle du potentiel électrique v d'un modèle simplifié de *triode* - un tube à vide d'un type particulier permettant l'amplification d'un signal - qu'étudia le physicien Néerlandais Balthazar VAN DER POL alors employé par les laboratoires Philips. Dans un article de 1927, il note qu'à certaines fréquences, on observe des "oscillations stables" c'est à dire en langage moderne la présence d'un cycle limite attractif (11).

Les *cycles limites* furent introduit par Henri POINCARÉ en 1881 dans *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*. La notion de cycle limite s'inscrit dans la démarche d'étude qualitative des équations différentielles qu'il initie. Ses observations le conduisent au théorème suivant.

Théorème 16. (Théorème de Poincaré-Bendixon)

Soit un système différentiel planaire \mathcal{C}^1 sur Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 :

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (16)$$

puis x une solution maximal de 16. Si x est à valeurs dans un compact K inclus dans Ω alors x est attiré dans les temps positifs par un cycle limite.

Ce théorème fut formulé par POINCARÉ dans son mémoire de 1881 mais sa preuve était incomplète. Elle sera achevée en 1901 par le mathématicien suédois Ivar BENDIXSON. Ce

théorème ne se généralise pas aux dimensions supérieures comme le montre l'*oscillateur de Lorentz*.

Comme pour les points d'équilibre, on peut définir une notion de stabilité des cycles limites.

Définition 13. Un cycle limite Γ est dit *stable* (resp. *instable*) lorsque Γ est ω (resp. α) limite d'ensemble de toute trajectoire au voisinage de Γ .

Avant tout chose il faut préciser ce que l'on par "au voisinage" lorsque l'on parle de trajectoires. Le plus naturel consiste à en la notion suivante : deux trajectoires T et S sont dites ε -voisines lorsqu'il existe un couple $(t, s) \in T \times S$ telle que $d(t, s) \leq \varepsilon$. Dans ce cas nous reformulons la définition précédente de la façon suivante :

Un cycle limite Γ est dit stable (resp. instable) lorsque Γ est ω (resp. α) limite d'ensemble de toute trajectoire ε -voisine de Γ pour un certain $\varepsilon > 0$.

Cependant cette définition se révèle assez lourde : nous n'avons pas réussi à démontrer les résultats attendus, nous enfermant des considérations topologiques inextricables. Pour simplifier notre étude nous allons proposer une autre définition valable dans le cadre planaire³ mais avant cela commençons par rappeler le fameux résultat suivant.

Théorème 17. (Théorème de Jordan)

Toute courbe simple fermée sépare le plan en deux composantes connexes : une non bornée appelée *extérieur* et l'autre bornée appelée *intérieur*.

Dans la suite, ce théorème nous sera encore utile sous la forme suivante.

Corollaire 18. (Passage à la douane)

Il n'existe pas de trajectoire continue reliant l'extérieur d'une courbe simple fermée à son intérieur.

Intuitivement, à partir du théorème de Jordan et de l'unicité des solutions de notre système différentiel, il suffit qu'une trajectoire dans chaque composante connexe de $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ admette pour α (resp. ω) limite d'ensemble Γ pour que toute trajectoire au voisinage de Γ le soit. Nous prendrons donc dans la suite la définition suivante :

Définition 14. Un cycle limite Γ est dit *stable* (resp. *instable*) lorsque Γ est ω (resp. α) limite d'ensemble d'une trajectoire incluse dans l'intérieur de Γ et d'une trajectoire incluse dans l'extérieur de Γ .

De cette définition émerge naturellement le concept suivant.

Définition 15. Un cycle limite Γ est dit *semi-stable extérieurement* lorsque Γ est ω (resp. α) limite d'ensemble de toute trajectoire au voisinage de Γ contenue dans l'extérieur (resp. l'intérieur) de Γ .

Un cycle limite Γ est dit *semi-stable intérieurement* lorsque Γ est ω (resp. α) limite d'ensemble de toute trajectoire au voisinage de Γ contenue dans l'intérieur (resp. l'extérieur) de Γ .

3. C'est-à-dire que nous avons trouvé une source pour cette définition. Qu'elle soit douteuse ou illusoire, nous n'arrivons plus à la retrouver...

Par exemple nous pouvons montrer ([HK91], p.380, théorème 12.18) que le cycle limite de l'oscillateur de Van Der Pol est stable.

Remarque 9. (Le seizième problème de Hilbert)

Les cycles limites sont des objets encore très mystérieux pour les mathématiciens comme l'illustre le *seizième problème de Hilbert* (1900). Ce dernier, pose en partie⁴ le problème suivant :

Quel est le nombre maximal $H(n)$ de cycles limites que peut avoir une équation différentielle polynomiale planaire de degré n ?

La première avancée dans le sens de cette conjecture est l'œuvre de Henri DULAC qui publie en 1923, 23 ans après l'énoncé du problème de Hilbert, un article où il démontre qu'une équation différentielle polynomiale planaire n'a qu'un nombre fini de cycles limites. Mais il fallut encore attendre 34 ans pour connaître la première valeur de $H(n)$ avec le mathématicien soviétique Ivan PETROVSKY et son élève Evgenii LANDIS qui obtinrent $H(2) = 3$. Enfin, avant que l'élève de LANDIS, Yulij ILYASHENKO, découvrit en 1963 une erreur dans la preuve. Cette erreur ne put être comblée mais les idées introduites par les deux auteurs permirent un important développement des mathématiques. Leur théorème fut définitivement enterré en 1980 lorsque le mathématicien chinois Shi SONGLING exhiba un système différentiel polynomial planaire avec quatre cycles limite.

En 1980, nous sommes retournés à la case départ quant à la résolution du seizième problème de Hilbert, même si nous avons toujours le *théorème de Dulac* : $H(n) < \infty$ mais plus pour longtemps. Dès 1977, le mathématicien belge Freddy DUMORTIER émet des doutes quand à la preuve de DULAC. Il se rend alors compte que personne ne semble avoir lu l'article. Fort de cela, en 1981, le mathématicien français Robert MOUSSU demanda l'avis des spécialistes quant à la preuve de DULAC. Il reçut alors une réponse de ILYASHENKO qui lui signala une erreur dans la démonstration. Il confirma à ce titre son rôle de découvreur d'erreurs dans le domaine. Et encore une fois, personne ne voyait comment réparer cette erreur. Mais ce n'est pas pour autant que le résultat est faux. En 1984, ILYASHENKO reprend des travaux sur les sujet et démontre le résultat de DULAC dans un cas restreint. Émerge alors en 1985 la preuve dans le cas du second degré par le mathématicien chilien BAMON et finalement en 1987, un quatuor de mathématiciens français : Jean ECALLE, Jean MARTINET, Robert MOUSSU et Jean-Pierre RAMIS établissent le résultat dans le cas général. Cette fois-ci, il fallut attendre seulement quelques mois pour que l'on découvre une erreur dans leur démonstration. Mais les mathématiciens ne rendent pas les armes et l'infatigable ILYASHENKO revient à la charge et en 1991 parvient à démontrer le résultat. Jean ECALLE y parvient également, indépendamment de ce dernier. Et aujourd'hui aucune erreur n'a été trouvée dans leurs démonstrations.

Nous sommes donc revenus au stade de 1923 mais avec 67 ans de plus. La question se retourne naturellement vers le calcul des $H(n)$. En 1984, QUIN annonce la preuve de l'égalité $H(2) = 4$ qui sera réfutée quatre ans plus tard par Shi SONGLING. En 1999, c'est au Russe Rifkatt BOGDANOV (celui de la bifurcation) de s'attaquer au problème de Hilbert qu'il annonce avoir résolu. Mais encore et toujours ILYASHENKO vint, par un contre-exemple, détruire la preuve de BOGDANOV.

L'histoire derrière la résolution de cette conjecture illustre l'importance des erreurs en mathématiques. Car malgré les multiples erreurs et retours en arrière, on comprend beaucoup mieux aujourd'hui les cycles limites qu'il y a un siècle.

4. L'autre partie du problème concerne les positions relatives des branches de courbes algébriques.

2.6.2 Application de Poincaré

Le but de l'*application de Poincaré* est la détermination des cycles. Pour cela on suppose l'existence d'un cycle Γ , non réduit à un point, de (13) dont on note T la période. On fixe $x_0 \in \Gamma$ puis l'on note $\Sigma = \Sigma(\Gamma)$ l'hyperplan orthogonal à Γ en x_0 . Ainsi,

$$\Sigma := \{x \in \mathbb{R}^n, \langle f(x_0), x - x_0 \rangle = 0\}$$

L'idée est la suivante : pour x suffisamment proche de x_0 , la solution passant par x va recroiser Σ en un point x' voisin de x_0 (figure 12). L'application de Poincaré sera alors l'application $x \mapsto x'$. Cette application renseigne clairement sur l'attractivité du cycle Γ . Le théorème montre l'existence de cette application.

Théorème 19. On suppose f de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$. Il existe $\delta > 0$ et une unique application $\tau : B(x_0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}_+$ de classe \mathcal{C}^1 tel que $\tau(x_0) = T$ et,

$$\forall x \in B(x_0, \delta), \quad \varphi_{\tau(x)}(x) \in \Sigma$$

Alors pour $x \in B(x_0, \delta) \cap \Sigma$, l'application $\mathbf{P}(x) = \mathbf{P}_{x_0}(x) := \varphi_{\tau(x)}(x)$ est appelé *application de Poincaré* pour Γ en x_0 . Elle est donc de classe \mathcal{C}^k .

Démonstration. [Per92]

Posons

$$F(x, t) := \langle f(x_0), \varphi_t(x) - x \rangle$$

de sorte que $\varphi_t(x) \in \Sigma$ si et seulement si $F(x, t) = 0$. Comme f est \mathcal{C}^k , par le théorème 3, $F(x, \cdot)$ est de classe \mathcal{C}^k et,

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, t) = \left\langle f(x_0), \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} \right\rangle$$

En particulier,

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x_0, T) = \langle f(x_0), f(x_0) \rangle = \|f(x_0)\|^2$$

est non nul comme x_0 n'est pas un point d'équilibre. Ainsi le théorème des fonctions implicites donne l'existence d'un $\delta > 0$ et d'une fonction τ définie sur $B(x_0, \delta)$ de classe \mathcal{C}^k tel que

$$\forall x \in B(x_0, \delta), \quad F(x, \tau(x)) = 0$$

Et avec $\tau(x_0) = T$. Finalement $\mathbf{P}(x) := \varphi(\tau(x), x)$ est de classe \mathcal{C}^k par rapport à chaque variable donc de classe \mathcal{C}^k . \square

Remarque 10. Notons qu'en appliquant la transformation $t \mapsto -t$ la nouvelle application de Poincaré est une inverse de \mathbf{P} ce qui montre que P est un \mathcal{C}^k -difféomorphisme.

Dans ce cas Σ est coupé en deux demi-droites Σ^- et Σ^+ avec Σ^+ inclus dans l'extérieur de Γ . On identifie alors \mathbb{R} à la droite orientée Σ de sorte que Σ^\pm s'identifie à \mathbb{R}^\pm .

Définition 16. Avec les précautions précédentes on définit la *fonction de déplacement* d par

$$\mathbf{d}(s) = \mathbf{d}_{x_0}(s) := \mathbf{P}_{x_0}(s) - s$$

On a donc $\mathbf{d}(0) = 0$. Mieux, le théorème suivant montre que \mathbf{d} permet de caractériser les cycles limites.

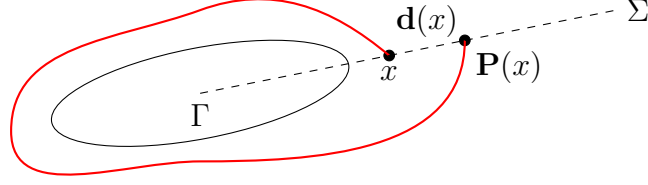


FIGURE 12 – Application de Poincaré et fonction de déplacement en deux dimensions.

Théorème 20. Supposons f de classe \mathcal{C}^k et,

$$\mathbf{d}(0) = \mathbf{d}'(0) = \dots = \mathbf{d}^{(k-1)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \sigma := \mathbf{d}^{(k)}(0) \neq 0.$$

$\sigma := \sigma_{x_0}$ est appelé le *coefficient de Lyapounov* de Γ en x_0 .

Dans ce cas :

1. si k est pair, Γ est un cycle limite semi-stable ;
2. si k est impair, Γ est stable (resp. instable) si $\sigma < 0$ (resp. $\sigma > 0$).

Démonstration. On effectue la preuve pour k impair et $\sigma < 0$, les autres cas peuvent se traiter de façon similaire.

\mathbf{d} étant de classe \mathcal{C}^k , appliquons la *formule de Taylor-Lagrange*

$$\mathbf{d}(s) = \frac{\mathbf{d}^{(k)}(\vartheta)}{k!} s^k \quad \text{où} \quad \vartheta := \vartheta(s) \in [0, s].$$

Par continuité de $\mathbf{d}^{(k)}$ en 0, $\mathbf{d}^{(k)}(\vartheta)$ est au voisinage de 0, disons sur $[-s_0, s_0]$ du signe de σ et non nul. Montrons alors que Γ est ω -ensemble limites des trajectoires passant par $\pm s_0$. On traite le cas de $+s_0$. Dans ce cas,

$$\forall s \in]0, s_0], \quad \mathbf{d}(s) < 0 \quad \text{i.e.} \quad \mathbf{P}(s) < s \tag{17}$$

Considérons alors la suite

$$s_n := \mathbf{P}^{\circ n}(s_0).$$

Soit τ la fonction donnée par le théorème 19 de sorte que

$$\mathbf{P}(x) = \varphi_{\tau(x)}(x)$$

On obtient facilement grâce à la *formule du flot*

$$s_n = \varphi_{t_n}(s_0) \quad \text{où} \quad t_n := \sum_{k=0}^{n-1} \tau(\mathbf{P}^{\circ k}(s_0)).$$

En particulier $\{s_n\}$ est contenue dans la trajectoire de \mathbf{P} passant par s_0 . Cela étant, par le *lemme de la douane*, s_n est toujours incluse dans la composant connexe extérieur de $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ i.e. $s_n > 0$. De plus par 17, la suite (s_n) est *strictement* décroissante. En particulier, la suite (s_n) admet une limite ℓ qui est, par continuité de \mathbf{P} , un point fixe de l'application de Poincaré i.e. $\mathbf{d}(\ell) = 0$. Or, $\ell \in [0, s_0]$ donc nécessairement $\ell = 0$.

Nous venons de montrer que

$$\varphi(t_n, s_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0.$$

Donc x_0 est un ω -point limite de s_0 . □

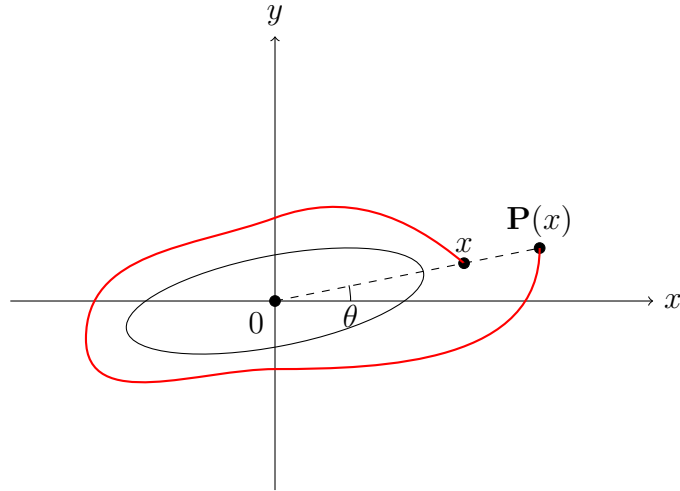


FIGURE 13 – Application de Poincaré pour les points d'équilibre.

Étendons la définition de l'application de Poincaré aux points fixes. On suppose f analytique. On suppose que (13) admet un point d'équilibre en 0 avec $df(0) \neq 0$. Une transformation linéaire permet de se ramener à un système de la forme suivante

$$\begin{cases} x' = ax - by + p(x, y) \\ y' = bx + ay + q(x, y) \end{cases} \quad (18)$$

avec $b \neq 0$. En passant en coordonnées polaires on obtient

$$\begin{cases} r' = ar + O(r^2) \\ \theta' = b + O(r) \end{cases} \quad (19)$$

Soient $r(t, r_0, \theta_0)$ et $\theta(t, r_0, \theta_0)$ la solution de ce système avec les données initiales $r(0, r_0, \theta_0) = r_0$ et $\theta(0, r_0, \theta_0) = \theta_0$. Dans ce cas pour r_0 suffisamment faible, $\theta(t, r_0, \theta_0)$ est strictement monotone donc est un difféomorphisme. Soit $t(\theta, r_0, \theta_0)$ son inverse. On pose

$$\mathbf{P}(r_0) := r(t(\theta_0 \pm 2\pi, r_0, \theta_0), r_0, \theta_0),$$

où l'on considère un $+$ si $\theta(t, r_0, \theta_0)$ est strictement croissante et un $-$ dans le cas contraire. Dans ce cadre on montre le théorème suivant :

Théorème 21. ([Per92] Theorem 3 p.218)

Supposons que

$$\mathbf{d}(0) = \mathbf{d}'(0) = \dots = \mathbf{d}^{(k-1)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \sigma := \mathbf{d}^{(k)}(0) \neq 0.$$

Alors k est toujours impair. Dans ce cas on dit que 0 est un point d'équilibre de multiplicité $\frac{k-1}{2}$. De plus si $\sigma < 0$ le point fixe est stable et si $\sigma > 0$ le point fixe est instable.

Donnons enfin quelques expressions des dérivées en 0 de l'application de Poincaré dans le cas d'un système planaire analytique. On note donc

$$p(x, y) = \sum_{i+j \geq 2} a_{ij} x^i y^j \quad q(x, y) = \sum_{i+j \geq 2} b_{ij} x^i y^j$$

On trouvera ces résultats dans [Per92].

$$\mathbf{P}'(0) = \exp\left(\frac{2\pi a}{|b|}\right) \quad (20)$$

$$\mathbf{P}''(0) = \frac{3\pi}{2b} \left\{ |3(a_{30} + b_{03}) + a_{12} + b_{21}| - \frac{1}{b} [2(a_{20}b_{20} - a_{02}b_{02}) - a_{11}(a_{02} + a_{20}) + b_{11}(b_{02} + b_{20})] \right\} \quad (21)$$

2.6.3 Théorème de Poincaré-Andronov-Hopf

Considérons le système

$$\dot{x} = f(x, \mu) \quad (22)$$

avec f de classe \mathcal{C}^1 . Nous allons étudier la bifurcation au voisinage d'un point d'équilibre non hyperbolique avec deux valeurs propres imaginaires pures. Soit donc x_0 un point d'équilibre de (22) pour le paramètre 0. Le théorème des fonctions implicites assure l'existence d'un unique point d'équilibre x_μ du système (22) pour le paramètre μ au voisinage de x_0 .

Dans ce cadre, si la stabilité de x_μ change en 0 alors ce changement est généralement accompagné de l'apparition ou de la disparition d'un cycle limite. On dit alors qu'il y a *bifurcation de Hopf*.

Quitte à translater x par x_μ , le système obtenu étant équivalent, on se ramène au cas où $x_\mu = 0$ au voisinage de 0. On écrit alors le système sous la forme

$$\dot{x} = A(\mu)x + F(x, \mu) \quad (23)$$

où $A(\mu) = df(0, \mu)$ de sorte que $F(0, \mu) = 0$ et $df(0, \mu) = 0$. Le théorème suivant donne des conditions suffisantes afin d'observer ce phénomène⁵.

Théorème 22. (Théorème de Poincaré-Andronov-Hopf)

On suppose que (23) est un système plan de classe \mathcal{C}^k avec $k \geq 3$. On note $\alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$ les valeurs propres de $A(\mu)$. On suppose que ces valeurs propres croisent l'axe des ordonnées avec une vitesse non nulle c'est-à-dire

$$\left. \frac{d\alpha(\mu)}{d\mu} \right|_{\mu=0} \neq 0 \quad (24)$$

Dans ce cas dans tout voisinage U de $(0, 0)$ dans \mathbb{R}^2 , pour tout $\mu_0 > 0$, il existe $|\mu| < \mu_0$ tel que (23) admette un cycle non trivial dans U .

Exemple 4. Dans l'exemple 2 on a bien bifurcation de Hopf en $\mu = 0$. Dans ce cas les cycles sont des cercles qui disparaissent immédiatement pour $|\mu| > 0$.

Démonstration. On donne la preuve précise en Annexe 2. Elle provient de [HK91]. L'idée est de réécrire le système en coordonnées polaires. Les hypothèses assurent alors que l'angle est, pour μ proche de 0, un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme. On peut alors réécrire le système comme une équation différentielle en r dépendant de θ . Ainsi, en intégrant cette équation, l'existence d'un cycle se réécrit comme une équation : $h(a, \mu) = 0$. On utilise les hypothèses de continuité sur f , qui se transmettent à h , afin d'appliquer le théorème des fonctions implicites qui permet de conclure. \square

5. L'animation suivante permet de visualiser le phénomène : <https://experiences.mathemarium.fr/simulations/sd-Bif2D-Hopf-Supercritical/>

Passons à la stabilité de ce cycle limite. Le théorème suivant est issu de [Per92].

Théorème 23. (Stabilité dans la bifurcation de Hopf)

On se place sous les hypothèses du théorème précédent. On suppose de plus que f est analytique et que x_0 est un point d'équilibre de multiplicité 1. Si $\sigma < 0$ alors l'unique cycle de (23) au voisinage de x_0 est attractif (resp. répulsif).

2.7 Tracé des diagrammes en dimension 1

Ici, on cherche à déterminer numériquement des diagrammes de bifurcations de la forme :

$$x' = f(x, \mu)$$

Pour cela, on suppose que l'on connaît une expression de f et de son gradient. On cherche à trouver les zéros de f dans l'ensemble $[-R, R]^2$, avec $R > 0$. On ne s'occupe pas pour l'instant des stabilités.

2.7.1 Construction d'une branche

Le théorème des fonctions implicites nous garantit que lorsque l'on a une dérivée partielle en x non nulle, on n'a pas de bifurcation au voisinage de notre point. À l'inverse, quand on rencontre un point où cette dérivée est nulle, il faut s'attendre à ce que l'on ait plusieurs zéros sur des cercles centrés en ce point. Par exemple, au point $(0, 0)$ pour la bifurcation en fourche canonique, il y a toujours quatre zéros sur les cercles centrés en 0. Mais laissons cela pour plus tard et penchons-nous maintenant sur la construction d'une *branche* du diagramme, *i.e.* d'une partie du diagramme sans bifurcation.

On suppose que l'on connaît un zéro (x_0, y_0) de f . Pour trouver un autre zéro de f proche de celui-ci, on applique une méthode proche de celle des fonctions implicites : comme le gradient est orthogonal aux lignes de niveau, il faut se déplacer dans une direction orthogonale au gradient. Si on a un pas de déplacement h , alors on prend comme nouveau zéro :

$$(x_1, y_1) = (x_0, y_0) + hs \frac{R \nabla f(x_0, y_0)}{\|\nabla f(x_0, y_0)\|},$$

Avec R la rotation d'un quart de tour, h notre pas et $s = \pm 1$. Tant que l'on ne sort pas de notre carré, ou que la condition de nullité de la dérivée n'est pas cassée, on peut continuer et construire une suite $(Z_k)_k$ de zéros définie par :

$$Z_{k+1} = Z_k + hs \frac{R \nabla f(Z_k)}{\|\nabla f(Z_k)\|}.$$

Pour les deux valeurs de s , on a donc deux suites de zéros (dans les deux sens).

Si on veut être plus précis, on ajoute une étape de correction via la méthode de Newton le long d'une droite presque orthogonale à la courbe : on cherche un zéro de

$$u_k : t \mapsto f(Z_{k+1} + t \nabla f(Z_k)).$$

On visualise ces différentes étapes sur la Figure 14.

En somme, le calcul avec le gradient nous donne la direction dans laquelle regarder, puis la méthode de Newton trouve effectivement le zéro recherché.

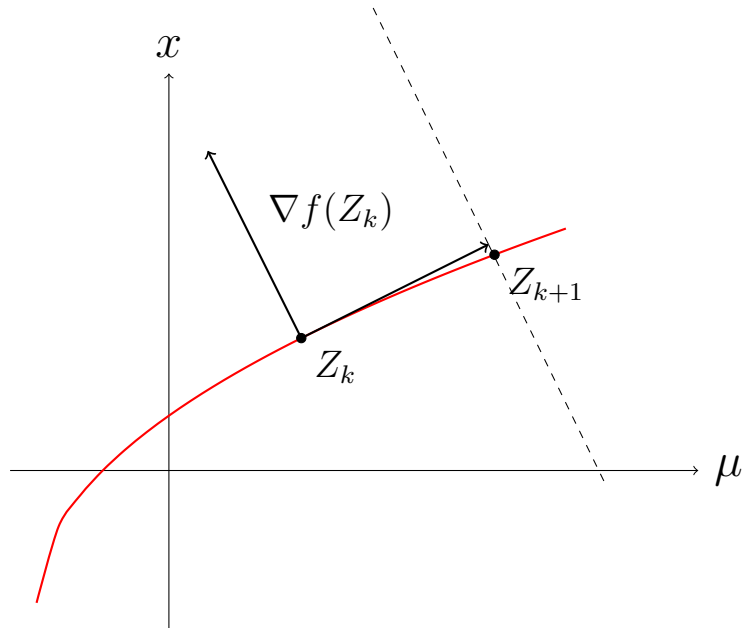


FIGURE 14 – Passage de Z_k à Z_{k+1} .

2.7.2 Recherche des zéros autour d'un point de bifurcations

Maintenant, supposons que l'on ait trouvé un zéro Z où la dérivée partielle en x est nulle. On ne peut plus appliquer la méthode précédente. Il nous faut alors trouver une autre solution. On s'attend à trouver plusieurs zéros au voisinage de notre point Z , c'est pour cela que l'on va paramétrer un cercle autour de Z et chercher (avec la méthode de Newton) des zéros sur ce cercle. Si on se donne un rayon r , cela revient donc à appliquer la méthode de Newton à la fonction :

$$\gamma : t \mapsto f(Z + (r \cos(t), r \sin(t))).$$

On discrétise le cercle en p points, on obtient alors p angles via la méthode de Newton. On enlève les doublons modulo 2π , on a alors (X_1, \dots, X_k) k zéros de notre fonction f , à partir desquels on va pouvoir repartir pour trouver des nouvelles branches. On présente un exemple en figure 15.

2.7.3 Principe général de l'algorithme

Pour commencer l'algorithme, il nous faut donc un zéro de départ, que l'on peut par exemple obtenir par une méthode de Newton unidimensionnelle sur un arc paramétré bien choisi.

Une fois que l'on a ce zéro, on construit une première branche en partant dans les deux sens. Tant que l'on tombe sur des points en bout de branche avec une dérivée partielle en x nulle, on y applique une recherche de zéros sur un cercle.

Une fois que l'on a nos nouveaux zéros, on peut construire les nouvelles branches à partir de ceux-ci et ainsi construire toute une composante connexe du diagramme de bifurcation.

Pour être sûr de trouver toutes ces composantes, il faut mener une recherche exhaustive des zéros dans notre carré.

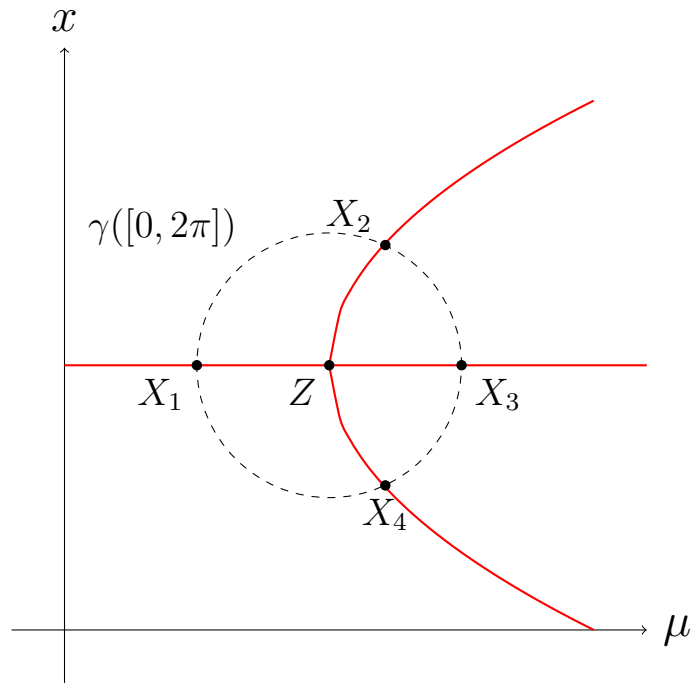


FIGURE 15 – Recherche de zéros autour d’un point de bifurcation.

2.7.4 Résultats

Voici ce que l’on a obtenu pour les diagrammes classiques présentés dans la section précédente (Figure 16).

Ces résultats sont très satisfaisants, notre algorithme est efficace. Nous l’avons essayé pour d’autres fonctions, pour lesquelles il marche tout aussi bien.

Il ne sert à rien de calculer les stabilités à chaque étape, mais il est plus intéressant de le faire *a posteriori*.

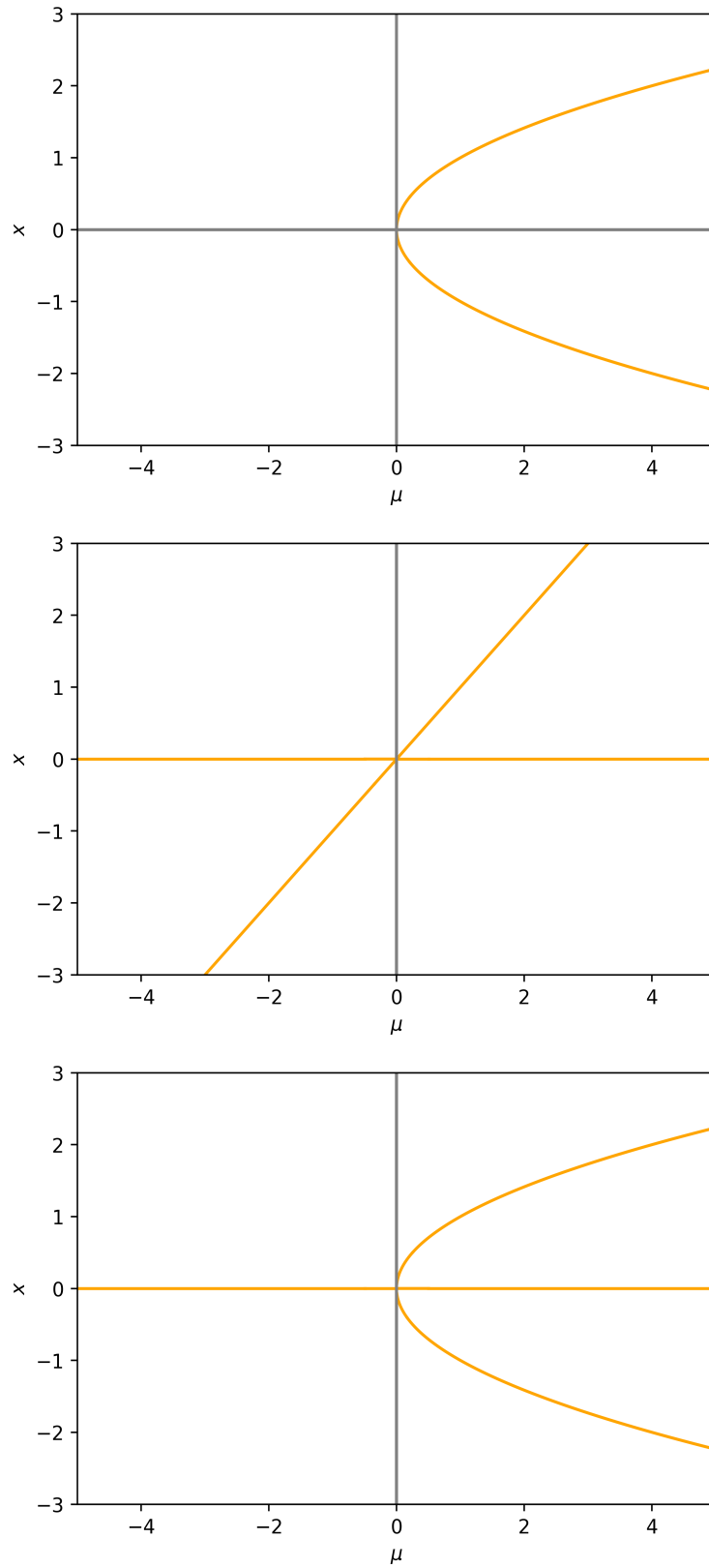


FIGURE 16 – Bifurcations nœud-selle, transcritique, et en fourche (de haut en bas) obtenues avec l’algorithme présenté.

3 Étude du modèle ratio-dépendant

Avec nos connaissances sur les bifurcations, on va pouvoir étudier plus en détail le modèle. Avant cela, montrons l'existence de solutions globales.

3.1 Existence des solutions

Montrons l'existence d'une unique solution globale bornée du système 8 pour toute donnée $(n_0, p_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ avec $n_0 \leq 1$. Nous sommes dans les applications du *théorème de Cauchy-Lipschitz local* donc il y a existence et unicité de solutions maximales. Soit alors (n, p) la solution maximale de 8 pour les données initiales $(n_0, p_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ où $n_0 \leq 1$.

Tant que $n(t), p(t) > 0$ nous pouvons écrire

$$\begin{cases} \frac{1}{n} \frac{dn}{dt} = (n - n^*)(1 - n) - \alpha \frac{p}{n + p} \\ \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} = \beta \frac{np}{n + p} - \vartheta p \end{cases}$$

Donc en intégrant ce système

$$\begin{cases} n(t) = n_0 \exp\left(\int_0^t F(n(s), p(s)) ds\right) \\ p(t) = n_0 \exp\left(\int_0^t G(n(s), p(s)) ds\right) \end{cases} \quad (25)$$

avec

$$F(n, p) = (n - n^*)(1 - n) - \alpha \frac{p}{n + p} \quad G(n, p) = \beta \frac{np}{n + p} - \vartheta p.$$

Nous en déduisons que n et p sont positifs à tout instant car si $t_0 := \inf\{t \geq 0 \mid n(t) = 0\}$ qui est strictement positif par continuité de n et comme $n_0 > 0$ alors pour tout $t \in]0, t_0[$, $n(t) = n_0 \exp\left(\int_0^t F(n(s), p(s)) ds\right)$ donc en passant à la limite $n(t_0) \neq 0$. De même $p > 0$ à tout instant.

Montrons maintenant que n est bornée par 1. De la positivité de n et p nous en déduisons que

$$\frac{dn}{dt} \leq n(n - n^*)(1 - n)$$

Maintenant supposons que $\sup n > 1$. Fixons γ entre 1 et $\sup n$ et posons $t_1 = \inf\{t > 0 \mid n(t) \geq \gamma\}$. Par continuité de n , $n(t_1) \geq \gamma$, comme de plus $n_0 \leq 1$, $t_1 > 0$. Puis, toujours par continuité, il existe $\delta > 0$ tel que $n(t) > 1$ pour tout $t \in [t_1 - \delta, t_1]$ donc n décroît strictement sur $[t_1 - \delta, t_1]$ d'où $n(t_1 - \delta) < n(t_1)$ ce qui contredit la définition de t_1 . Nous en déduisons donc que $n \leq 1$ à tout instant.

Il reste à montrer que p est bornée. Pour cela une combinaison linéaire des deux équations de 8 donne

$$\alpha \frac{dp}{dt} + \beta \frac{dn}{dt} = -\alpha \vartheta p + \beta n(n - n^*)(1 - n)$$

Posons alors,

$$M := \sup\{\beta n(n - n^*)(1 - n) + \beta \vartheta n\}$$

de sorte qu'en posant $r := \alpha p + \beta n$,

$$\frac{dr}{dt} \leq M - \vartheta r,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d}{dt} [r(t)e^{\vartheta t}] e^{-\vartheta t} \leq M.$$

D'où

$$r(t) \leq \frac{1}{\vartheta} + e^{-\vartheta} \left(r(0) - \frac{1}{\vartheta} \right),$$

ce qui montre que r est bornée, donc p également. Ainsi les solutions sont globales.

3.2 Équilibres

3.2.1 Détermination des équilibres

Nous avons 5 points d'équilibre. Les équilibres frontaliers

$$E_0 = (0, 0) \quad E_1 = (n^*, 0) \quad E_2 = (1, 0).$$

Et les équilibres intérieurs $E_i^\circ = (n_i^\circ, p_i^\circ)$ avec

$$n_1^\circ = \frac{(1+n^*) - \sqrt{(1-n^*)^2 - 4\alpha(1-\vartheta/\beta)}}{2} \quad n_2^\circ = \frac{(1+n^*) + \sqrt{(1-n^*)^2 - 4\alpha(1-\vartheta/\beta)}}{2}$$

$$p_i^\circ = \frac{\beta - \vartheta}{\vartheta} n_i^\circ$$

existant sous la condition

$$\beta \geq \vartheta \geq \beta \left[1 - \frac{(1-n^*)^2}{4\alpha} \right] \quad (26)$$

Nous ne traiterons pas dans la suite le cas dégénéré $\beta = \vartheta \geq \beta \left[1 - \frac{(1-n^*)^2}{4\alpha} \right]$. Nous mentionnerons par H l'hypothèse suivante

$$\beta > \vartheta > \beta \left[1 - \frac{(1-n^*)^2}{4\alpha} \right]. \quad (\text{H})$$

Les calculs détaillés sont donnés en Annexe 3.

3.2.2 Stabilité des équilibres pour l'effet Allee fort

Passons à la stabilité des points d'équilibre. On se limite ici au cas de l'effet Allee fort ($n^* > 0$). Les calculs détaillés figurent en Annexe 4. On récapitule cela dans le tableau figure 17 où l'on rappelle les critères d'existence des équilibres.

Point d'équilibre	Condition d'existence	Stabilité
E_0	Toujours	AS
E_1	Toujours	S lorsque $\beta > \vartheta$ et I lorsque $\beta < \vartheta$
E_2	Toujours	AS
E_1°	Condition H	PS
E_2°	Condition H	AS dès que $Q > 0$ et I dès que $Q < 0$

FIGURE 17 – Tableau récapitulatif des équilibres. Q est défini *infra* (27)

$Q = Q(\alpha, \beta, n^*, \vartheta)$ est définie comme la quantité

$$\frac{1+n^*}{2} \sqrt{(1-n^*)^2 - 4\alpha \left(1 - \frac{\vartheta}{\beta} \right)} - \frac{(1-n^*)^2}{2} + 2\alpha - \alpha \frac{\vartheta}{\beta} - \alpha \frac{\vartheta^2}{\beta^2} - \vartheta \left(1 - \frac{\vartheta}{\beta} \right) \quad (27)$$

Les abréviations utilisées sont les suivantes :

- **AS** = *asymptotiquement stable* ;
- **S** = *stable* ;
- **I** = *instable* ;
- **PS** = *Point selle* ;

3.3 Bifurcation nœud-selle

Dans cette sous-partie, nous allons étudier un cas de bifurcation nœud-selle ayant lieu pour un effet Allee fort.

Les deux points intérieurs se regroupent en un point (n°, p°) pour une valeur $\vartheta = \vartheta^\circ$:

$$n^\circ = \frac{1 + n^*}{2}, \quad p^\circ = \frac{(1 - n^*)^2(1 + n^*)}{2(4\alpha - (1 - n^*)^2)}, \quad \vartheta^\circ = \frac{\beta}{4\alpha}(4\alpha - (1 - n^*)^2). \quad (28)$$

On peut donc supposer qu'il y a une bifurcation de type nœud-selle proche de ce point. On cherche à appliquer le théorème de Sotomayor.

Au point (n°, p°) , et en $\vartheta = \vartheta^\circ$, la différentielle du système vaut :

$$A = \frac{1}{(n^\circ + p^\circ)^2} \begin{bmatrix} \alpha n^\circ p^\circ & -\alpha n^{\circ 2} \\ \beta p^{\circ 2} & -\beta n^\circ p^\circ \end{bmatrix} \quad (29)$$

A n'est clairement pas inversible, et quand $\alpha \neq \beta$, on vérifie facilement que $A^2 \neq 0$, donc que la valeur propre 0 est simple. Posons :

$$\xi = \frac{(1 - n^*)^2}{4\alpha - (1 - n^*)^2} \text{ et } \bar{\xi} = \frac{\alpha}{\xi\beta}.$$

Alors on peut vérifier que $v = (1, \xi)$ et $w = (1, -\bar{\xi})$ vérifient (10). Ainsi, on a une bifurcation nœud-selle quand la valeur ϑ passe par la valeur ϑ° .

Pour l'observer, on regarde la projection selon le vecteur v des valeurs du système sur la droite portée par v passant par (n°, p°) .

On présente en figure 18 ce que l'on observe avec notre algorithme. On observe bien un diagramme cohérent vis-à-vis de la bifurcation nœud-selle canonique. En effet, la valeur de ϑ° observée correspond à la valeur numérique 0,34.

Ce résultat délimite donc une frontière dans l'espace des paramètres, et deux jeux de paramètres pris de part et d'autre de cette frontière présenteront des propriétés différentes.

3.4 Bifurcation de Hopf

Nous allons montrer l'existence d'une *bifurcation de Hopf* au point d'équilibre E_2° avec α comme paramètre de bifurcation. On se place sous la condition H. Les notations sont celles de l'annexe 4.

En investigant le terme Q on remarque que lorsque $\alpha < \beta$, $Q < 0$. Une condition nécessaire pour voir une bifurcation de Hopf en E_2° est donc $\alpha \geq \beta$. Supposons cela dans la suite.

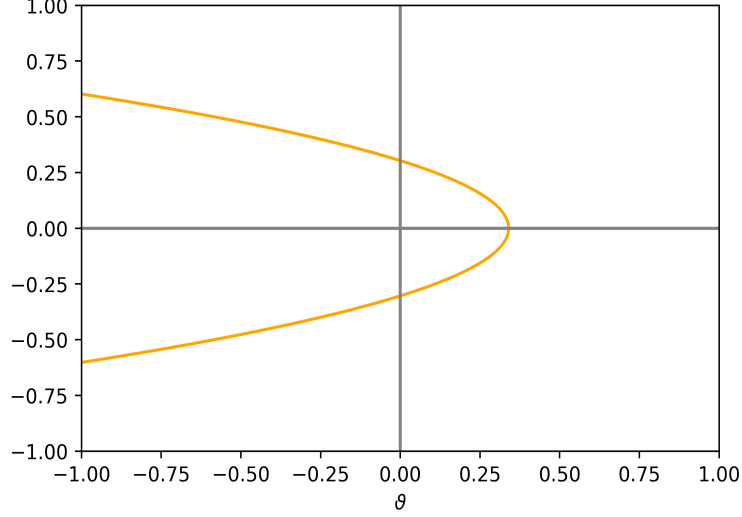


FIGURE 18 – Bifurcation nœud-selle observée sur le modèle proie-prédateur ratio-dépendant avec effet Allee ($\alpha = \beta = 0,5$ et $n^* = 0,2$).

Regardons alors la valeur de Q lorsque α vaut $\alpha_1 = \beta$ et $\alpha_2 = \frac{\beta}{4(\beta-\vartheta)}(1-n^*)^2$ de sorte que $\vartheta = \beta \left[1 - \frac{(1-n^*)^2}{4\alpha} \right] =: \vartheta_c$. Notons que pour que α_1 soit dans le domaine délimité par H il faut imposer l'hypothèse supplémentaire

$$\beta - \vartheta < \frac{(1-n^*)^2}{4} \quad (30)$$

Cela étant nous avons

$$Q(\alpha = \alpha_1) = -\frac{1+n^*}{2} \sqrt{(1-n^*)^2 - 4(\alpha - \vartheta)} - \frac{(1-n^*)^2}{2} + 2(\alpha - \vartheta) < 0$$

et

$$Q(\alpha = \alpha_2) = \frac{\vartheta_c}{\beta^2}(\beta - \vartheta_c)(\alpha - \beta) > 0$$

car $\alpha \geq \beta$ par hypothèse. Nous en déduisons l'existence de α_0 tel que $\text{Tr}(\alpha_0) = 0$. Comme de plus $\det(J_2) \neq 0$ nous en déduisons que J_2 admet deux valeurs propres imaginaires pures, non nulles. Maintenant,

$$\frac{d}{d\alpha} Q(\alpha = \alpha_0) = \frac{(1+n^*)(1-\vartheta/\beta)}{\sqrt{(1-n^*)^2 + 4\alpha_0(\vartheta/\beta - 1)}} + \left(1 - \frac{\delta}{\beta} \right) + \left(1 - \frac{\vartheta^2}{\beta^2} \right).$$

Maintenant comme $\beta > \vartheta$ cette dérivée est toujours strictement positive. Nous en déduisons par le théorème 22 qu'il y a bifurcation de Hopf en E_2° .

Quant à la stabilité, les auteurs de l'article déclarent avoir étudié numériquement le coefficient de Lyapounov ce qui leur a permis de conclure que ce dernier est toujours strictement positif. Cependant ils ne donnent aucune formule, la jugeant *rather cumbersome*⁶. Au vu des expressions précédentes déjà conséquentes, nous nous épargnerons toute tentative de calcul et les croirons sur parole.

6. plutôt lourde

Conclusion

À travers notre étude, nous avons pu mettre en évidence comment la théorie des bifurcations permet de comprendre le comportement d'un système différentiel selon les valeurs de ses paramètres en identifiant des zones dans lesquelles les solutions sont semblables. Le travail suivant serait d'étudier qualitativement les solutions dans chacune de ces zones. Cette étude est relativement fastidieuse et nécessite des outils numériques avancés.

Par ailleurs, ce travail nous a permis de découvrir la recherche mathématique et de comprendre la relation entre les mathématiques fondamentales et les mathématiques appliquées. Nous remercions Benjamin BOUTIN pour l'opportunité qu'il nous a fourni et les bons moments qui en ont découlé.

* *
*

Annexes

Annexe 1 - Modèle de Lotka-Volterra

Proposition 24. La solution du problème de Cauchy de Lotka-Volterra est bornée donc globale.

Démonstration. Considérons la fonction $H \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ définie par

$$H(x, y) = \delta x - \gamma \ln(x) + \beta y - \alpha \ln(y).$$

Si (x, y) est la solution de notre problème de Cauchy, on a, par le théorème des fonctions composées :

$$\frac{\partial H(x, y)}{\partial t} = dH(x(t), y(t))(x'(t), y'(t)).$$

Cette écriture est licite car $x(t)$ et $y(t)$ sont strictement positifs pour tout t . Soit, en calculant dH et en remplaçant $x'(t)$ et $y'(t)$ par leur expression dans le système différentiel :

$$\frac{\partial H(x, y)}{\partial t} = x(t)(\alpha - \beta y(t)) \left(\delta - \frac{\gamma}{x(t)} \right) + y(t)(\delta x(t) - \gamma) \left(\beta - \frac{\alpha}{y(t)} \right) = 0.$$

On a donc :

$$\forall t > 0, H(x(t), y(t)) = H(x_0, y_0).$$

Pour des certains X et Y positifs, on a par croissances comparées :

$$\forall x > X, x \leq \frac{1}{2\delta}(\delta x - \gamma \ln(y)) \text{ et } \forall y > Y, y \leq \frac{1}{2\beta}(\beta y - \alpha \ln(y)).$$

Ainsi, si on prend $M = \max(X, Y, (2\beta)^{-1}, (2\delta)^{-1})$, on a :

$$\forall t > 0, \|(x(t), y(t))\|_1 \leq MH(x(t), y(t)) \leq MH(x_0, y_0).$$

Donc notre solution est bornée. Ainsi, le théorème de sortie de tout compact assure qu'elle est globale. □

Démonstration. Périodicité des solutions

On va s'appuyer sur le portrait de phase. Supposons, sans perte de généralité, que notre condition initiale se situe dans le quart de plan inférieur gauche (le plan est scindé en quatre selon deux droites). Si nos solutions restent dans cette zone pour tout temps, alors x et y sont deux fonctions monotones du temps, et comme elles sont bornées, elles convergent vers une limite (x^*, y^*) . Or le système différentiel implique que x' et y' convergent également. Comme x et y sont bornées, la limite des dérivées est 0. On en déduit que (x^*, y^*) est un point d'équilibre du système. Or $x^* \geq x_0 > 0$ et $y^* \leq y_0 < \frac{\alpha}{\beta}$, ce qui ne se peut. Il existe un temps t_1 minimal tel que $(x(t_1), y(t_1))$ est dans le quart de plan inférieur droit. De proche en proche, avec à chaque fois des démonstrations similaires, on montre qu'il existe un temps t^* tel que la solution rentre à nouveau dans le quart de plan inférieur gauche puis qu'il existe un temps t_2 supérieur à t^* minimal tel que la solution entre dans le quart inférieur droit. On a par définition :

$$x(t_1) = x(t_2) = \frac{\gamma}{\delta} \text{ et } H(x(t_1), y(t_1)) = H(x(t_2), y(t_2)).$$

De quoi on déduit :

$$\beta y(t_1) - \alpha \ln(y(t_1)) = \beta y(t_2) - \alpha \ln(y(t_2)).$$

Pour $y \leq \frac{\alpha}{\beta}$, la fonction $(y \mapsto (\beta y - \alpha \ln(y)))$ est injective donc $y(t_1) = y(t_2)$.

Dès lors, les fonctions $(x(t_1 + \cdot), y(t_1 + \cdot))$ et $(x(t_2 + \cdot), y(t_2 + \cdot))$ vérifient le même problème de Cauchy, donc sont égales, et les fonctions x et y sont donc périodiques, de période $t_2 - t_1$. \square

Annexe 2 - Preuve du théorème 22

On rappelle le résultat suivant de dépendance par rapport aux paramètres.

Théorème 25. (Dépendance par rapport aux paramètres)

Considérons le système différentiel

$$x' = f(t, x, \lambda)$$

avec $f : I \times \Omega \times \Lambda \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable où $I \ni 0$ et Λ sont des intervalles ouverts de \mathbb{R} et Ω un ouvert de \mathbb{R}^n .

On note $x(\cdot, x_0, \lambda)$ la solution maximale de

$$x' = f_\lambda(t, x)$$

prenant la valeur x_0 en $t = 0$. Dans ce cas si f est de classe \mathcal{C}^k alors $x(t, x_0, \lambda)$ est de classe \mathcal{C}^k .

On trouve une démonstration de ce résultat dans [Ber17] (théorème 3.4, p.114).

Commençons la preuve. On sait que $A(\mu)$ est semblable au voisinage de 0 à la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha(\mu) & \beta(\mu) \\ -\beta(\mu) & \alpha(\mu) \end{pmatrix}$$

Ainsi moyennant une transformation linéaire on se ramène à la forme précédente. Maintenant comme $\beta(\mu) \neq 0$ au voisinage de 0 on peut modifier le paramètre de temps t selon la transformation

$$t \longleftrightarrow \beta(\mu)t$$

Dans ce cas le système se réécrit

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{\alpha(\mu)}{\beta(\mu)}x_1 + x_2 + f_1(x_1, x_2, \mu) \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + \frac{\alpha(\mu)}{\beta(\mu)}x_2 + f_2(x_1, x_2, \mu) \end{cases} \quad (31)$$

avec $f_{1,\mu}$ et $f_{2,\mu}$ des applications de classe \mathcal{C}^k . Enfin comme

$$\frac{d}{d\mu} \left[\frac{\alpha(\mu)}{\beta(\mu)} \right]_{\mu=0} \neq 0$$

d'après (24) nous en déduisons qu'au voisinage de 0 l'application $\mu \mapsto \frac{\alpha(\mu)}{\beta(\mu)}$ est un difféomorphisme. Nous pouvons donc substituer μ à $\frac{\alpha(\mu)}{\beta(\mu)}$. Finalement nous nous sommes ramenés au système

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \mu x_1 + x_2 + f_1(x_1, x_2, \mu) \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + \mu x_2 + f_2(x_1, x_2, \mu) \end{cases} \quad (32)$$

avec $f_{1,\mu}$ et $f_{2,\mu}$ des applications de classe \mathcal{C}^k . Pour terminer notons Λ le voisinage final de 0 où l'équation précédente est valable.

Pour démontrer l'existence d'une solution périodique lorsque μ est proche de 0 nous allons passer en coordonnées polaires : $x = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$. Dans ce cas pour $r \neq 0$ nous avons

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{d}{dt} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ &= \frac{1}{r} \left[\frac{dx_1}{dt} x_1 + \frac{dx_2}{dt} x_2 \right] \\ &= \frac{1}{r} [\mu x_1^2 + x_1 x_2 + f_1(x_1, x_2, \mu) x_1 - x_1 x_2 + \mu x_2^2 + f_2(x_1, x_2, \mu) x_2] \\ &= \mu r + f_1(x_1, x_2, \mu) \cos(\theta) + f_2(x_1, x_2, \mu) \sin(\theta) \end{aligned}$$

Maintenant pour $\theta \in]0, 2\pi[$ et toujours $r \neq 0$ nous avons,

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos(\theta) - r \frac{d\theta}{dt} \sin(\theta)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{r \sin(\theta)} \left[\frac{dr}{dt} \cos(\theta) - \frac{dx_1}{dt} \right] \\ &= \frac{1}{r \sin(\theta)} [\mu r \cos(\theta) + f_1(x_1, x_2, \mu) \cos(\theta)^2 + f_2(x_1, x_2, \mu) \cos(\theta) \sin(\theta) - \mu x_1 - x_2 - f_1(x_1, x_2, \mu)] \\ &= \frac{1}{r \sin(\theta)} [-f_1(x_1, x_2, \mu) \sin(\theta)^2 + f_2(x_1, x_2, \mu) \cos(\theta) \sin(\theta) - x_2] \\ &= -1 - \frac{1}{r} [f_1(x_1, x_2, \mu) \sin(\theta) - f_2(x_1, x_2, \mu) \cos(\theta)] \end{aligned}$$

Nous en déduisons le système en coordonnées polaires suivant, défini sur $]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$ par

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \mu r + f_1(r \cos(\theta), r \sin(\theta), \mu) \cos(\theta) + f_2(r \cos(\theta), r \sin(\theta), \mu) \sin(\theta) \\ \frac{d\theta}{dt} = -1 - \frac{1}{r} [f_1(r \cos(\theta), r \sin(\theta), \mu) \sin(\theta) - f_2(r \cos(\theta), r \sin(\theta), \mu) \cos(\theta)] \end{cases} \quad (33)$$

Prolongeons ce système à $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = p(r, \theta, \mu) \\ \frac{d\theta}{dt} = -1 - q(r, \theta, \mu) \end{cases} \quad (34)$$

où l'on a posé

$$p(r, \theta) := \mu r + f_1(r \cos(\theta), r \sin(\theta), \mu) \cos(\theta) + f_2(r \cos(\theta), r \sin(\theta), \mu) \sin(\theta)$$

$$q(r, \theta, \mu) := \frac{1}{r} [f_1(r \cos(\theta), r \sin(\theta), \mu) \sin(\theta) - f_2(r \cos(\theta), r \sin(\theta), \mu) \cos(\theta)]$$

prolongé en $r = 0$ par

$$q(r, \theta, \mu) = \langle Df_\mu(0, 0) \cdot (\cos(\theta), \sin(\theta)), (\sin(\theta), -\cos(\theta)) \rangle$$

Ainsi, p est de classe \mathcal{C}^k tandis que q est de classe \mathcal{C}^{k-1} .

En particulier $q(0, \theta, \mu) = 0$ pour tout θ d'où $\dot{\theta} = -1$. Ainsi θ est un difféomorphisme, on peut paramétrer t par θ . Les équations précédentes se réécrivent alors

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{p(r, \theta)}{1 + q(r, \theta)} := J(r, \theta, \mu) \quad (35)$$

avec J de classe \mathcal{C}^{k-1} . On a

$$J(0, \theta) = 0 \quad \partial_r J(0, \theta, \mu) = \mu$$

Cela nous invite à poser

$$J(r, \theta, \mu) = \mu r + F(r, \theta, \mu)$$

avec F de classe \mathcal{C}^{k-1} vérifiant

$$F(0, \theta, \mu) = 0 \quad \partial_r F(0, \theta, \mu) = 0 \quad (36)$$

Finalement le système (35) devient

$$\frac{dr}{d\theta} = \mu r + F(r, \theta, \mu) \quad (37)$$

Les solutions du système précédent étant les écritures en coordonnées polaires des solutions de (32) nous en déduisons qu'elles sont globales et uniques⁷. On note alors $r(\theta, a, \mu)$ l'unique solution de (37) vérifiant $r(0, a, \mu) = a$. En intégrant le problème précédent nous obtenons

$$r(\theta, a, \mu) = ae^{\mu\theta} + \int_0^\theta e^{(\theta-s)\mu} F(r(s, a, \mu), s, \mu) ds \quad (38)$$

Dans ce cas $r(\cdot, a, \mu)$ est 2π -périodique si et ssi $r(2\pi, a, \mu) = r(0, a, \mu)$ ce qui se traduit en l'équation suivante

$$(1 - e^{-2\pi\mu})a + \int_0^{2\pi} e^{-\mu s} F(r(s, a, \mu), s, \mu) ds \quad (39)$$

Posons alors,

$$h(a, \mu) := 1 - e^{-2\pi\mu} + \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} e^{-\mu s} F(r(s, a, \mu), s, \mu) ds$$

que l'on prolonge en $a = 0$ par $h(0, \mu) = 1 - e^{-2\pi\mu}$. Montrons que h est \mathcal{C}^1 au voisinage de $(0, 0)$.

7. L'argument est léger. Cela demanderait plus de justifications que nous n'avons pas été en mesure d'apporter.

Comme F est \mathcal{C}^1 elle est localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Soit $K_\delta := [-\delta, \delta]$. Quitte à remplacer Λ par une boule fermée (et donc bornée), on peut supposer Λ compact. Dans ce cas par continuité, $K'_\delta = r(K_\delta, [2\pi], \Lambda)$ est compact. De plus K'_δ contient 0. Dans ce cas F est globalement lipschitzienne par rapport à la seconde variable sur K'_δ . Notons L_δ une constante de Lipschitz associé. Immédiatement pour $\delta_1 \leq \delta_2$, de l'inclusion $K'_{\delta_1} \subset K'_{\delta_2}$ on en déduit que $L_{\delta_1} \leq L_{\delta_2}$. Supposons donc $\delta \leq 1$ et posons $L = L_1$. Par le lemme de Grönwall

$$|r(\theta, a, \mu)| \leq e^{L\theta}|a| \quad \forall a \in K_1 \quad (40)$$

Les conditions 36 permettent d'écrire

$$F(r, \theta, \mu) = \frac{1}{2} \int_0^r \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r - \varrho, \theta, \mu) \varrho d\varrho$$

Ainsi pour tout $a \in K_\delta$

$$|F(r(s, a, \mu), s, \mu)| \leq \frac{1}{4} \sup_{K'_\delta} \left| \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \right| r(s, a, \mu)^2 \quad (41)$$

En combinant 40 et 41 on obtient pour tout $a \in K_\delta$ et $s \in [0, 2\pi]$

$$|F(r(s, a, \mu), s, \mu)| \leq \frac{1}{4} \sup_{K'_\delta} \left| \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \right| e^{2\pi L} a^2 \quad (42)$$

Ainsi,

$$\left| \int_0^{2\pi} e^{-\mu s} F(r(s, a, \mu), s, \mu) ds \right| \leq M_\delta a^2$$

avec $M_\delta := \frac{\pi}{2} \sup_{K'_\delta} \left| \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \right| e^{2\pi L}$ une constante. Nous en déduisons que pour tout $a \in K_\delta$,

$$\left| \frac{h(a, \mu) - h(0, \mu)}{a} \right| \leq M_\delta$$

Mais comme F est de classe \mathcal{C}^{k-1} , $M_\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$. Ainsi, h admet une dérivée partielle selon a en $(0, \mu)$. Puis, par les opérations usuelles avec notamment le théorème de dépendance des paramètres, F admet des dérivées partielles pour tout $(a, \mu) \in \mathbb{R} \times \Lambda$. De plus pour $a \neq 0$ on a les expressions suivantes

$$\frac{\partial h}{\partial a}(a, \mu) = \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} e^{-\mu s} \frac{\partial F}{\partial r}(r(s, a, \mu), s, \mu) \frac{\partial r}{\partial a} r(s, a, \mu) ds - \frac{1}{a^2} \int_0^{2\pi} e^{-\mu s} F(r(s, a, \mu), s, \mu) ds$$

$$\frac{\partial h}{\partial \mu}(a, \mu) = 2\pi e^{-2\pi\mu}$$

$$+ \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} e^{-\mu s} \left[-sF(r(s, a, \mu), s, \mu) + \frac{\partial F}{\partial r}(r(s, a, \mu), s, \mu) \frac{\partial r}{\partial \mu} r(s, a, \mu) + \frac{\partial F}{\partial \mu}(r(s, a, \mu), s, \mu) \right] ds$$

qui sont de plus continue en a et en μ . Il reste à établir la continuité des dérivées partielles en $(0, 0)$. Pour $\partial_a F$ on remarque que la continuité du second terme découle des majorations précédentes. Quant au premier terme, la même démarche fonctionne :

$$\left| \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} e^{-\mu s} \frac{\partial F}{\partial r}(r(s, a, \mu), s, \mu) \frac{\partial r}{\partial a} r(s, a, \mu) ds \right| \leq \pi \sup_{K'_\delta} \left| \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \right| \sup_{K'_1} \left| \frac{\partial r}{\partial a} \right| e^{2\pi L} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$$

Maintenant pour $\partial_\mu h$, au vu de ce qui précède, le seul terme éventuellement problématique est

$$\frac{1}{a} \int_0^{2\pi} e^{-\mu s} \frac{\partial F}{\partial \mu}(r(s, a, \mu), s, \mu) ds$$

Mais $\frac{\partial F}{\partial \mu}$ est dérivable par rapport à r et par le théorème de Schwarz

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \mu}(0, \theta, \mu) = \frac{\partial^2 F}{\partial \mu \partial r}(0, \theta, \mu) = 0$$

Et l'on peut alors continuer comme précédemment.

Ainsi nous avons montré que h est \mathcal{C}^1 . De plus,

$$\frac{\partial h}{\partial \mu}(0, 0) = 2\pi$$

Ainsi le théorème des fonctions implicites montre qu'il existe μ^* une fonction de classe \mathcal{C}^1 avec $\mu^*(0) = 0$ tel que sur un voisinage de $(0, 0)$,

$$h(a, \mu) = 0 \Leftrightarrow \mu = \mu^*(a)$$

Alors, $r^*(\theta, a) := r(\theta, a, \mu^*(a))$ est une solution 2π -périodique de 32.

Annexe 3 - Points d'équilibre

Voici les calculs des points d'équilibre du système présentés en 3.2.1. Les points d'équilibre du système dans le quadrant supérieur sont donnés par les solutions $(n, p) \in \mathbb{R}_+^2$ du système d'équations

$$\begin{cases} n(n - n^*)(1 - n) = \alpha \frac{np}{n + p} \\ \beta \frac{np}{n + p} = \vartheta p \end{cases} \quad (43)$$

Commençons par traiter les cas particuliers où n ou p est nul pour pouvoir ensuite simplifier ce système. Si $n = 0$ alors la seconde équation montre que $p = 0$ et si $p = 0$ alors $n \in \{0, n^*, 1\}$. On obtient ainsi trois points d'équilibres

$$E_0 = (0, 0) \quad E_1 = (n^*, 0) \quad E_2 = (1, 0)$$

Supposons maintenant $n, p > 0$.

$$\begin{cases} (n - n^*)(1 - n) = \alpha \frac{p}{n + p} \\ \beta \frac{n}{n + p} = \vartheta \end{cases} \quad (44)$$

Réécrivons alors ce système en deux équations polynomiales.

$$\begin{cases} p[\alpha - (n - n^*)(1 - n)] = n(n - n^*)(1 - n) \\ p = \frac{\beta - \vartheta}{\vartheta} n \end{cases} \quad (45)$$

En combinant ces deux équations on obtient une équation en n qui se réduit en

$$n^2 - n(n^* + 1) + \alpha \left(1 - \frac{\vartheta}{\beta}\right)$$

Le discriminant de ce système est

$$(1 - n^*)^2 - 4\alpha \left(1 - \frac{\vartheta}{\beta}\right)$$

Nous en déduisons une condition nécessaire à l'existence d'un équilibre intérieur :

$$\vartheta \geq \beta \left[1 - \frac{(1 - n^*)^2}{4\alpha}\right] \quad (46)$$

Dans ce cas nous avons deux équilibres notés $E_i^\circ = (n_i^\circ, p_i^\circ)$, éventuellement égaux lorsque que l'inégalité précédente est une inégalité, définies par

$$\begin{aligned} n_1^\circ &= \frac{(1+n^*) - \sqrt{(1-n^*)^2 - 4\alpha(1-\vartheta/\beta)}}{2} & n_2^\circ &= \frac{(1+n^*) + \sqrt{(1-n^*)^2 - 4\alpha(1-\vartheta/\beta)}}{2} \\ p_i^\circ &= \frac{\beta - \vartheta}{\vartheta} n_i^\circ \end{aligned} \quad (47)$$

Nous avons alors une seconde condition afin que ces équilibres soient bien dans \mathbb{R}_+ à savoir

$$\beta \geq \vartheta \quad (48)$$

afin que p_i° soit positif.

Annexe 4 - Stabilité

On détaille ici la détermination des calculs présentés en 3.2.2. Pour déterminer la stabilité des points d'équilibre nous allons classiquement calculer les valeurs propres de la jacobienne de

$$f(n, p) = \left(n(n - n^*)(1 - n) - \alpha \frac{np}{n + p}, \beta \frac{np}{n + p} - \vartheta \right)$$

en les points d'équilibre sauf en E_0 où l'application f n'est pas différentiable. On peut tout de même montrer que ce point d'équilibre est asymptotiquement stable . Nous étudierons sa stabilité dans un second temps. Nous ne traiterons pas les cas dégénérés où le critère de stabilité en première approximation ne permet de conclure.

Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial n} &= -3n^2 + 2n(1 + n^*) - n^* - \alpha \frac{p^2}{(n + p)^2} \\ \frac{\partial f_1}{\partial p} &= -\alpha \frac{n^2}{(n + p)^2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial n} &= \beta \frac{p^2}{(n + p)^2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial p} &= \beta \frac{n^2}{(n + p)^2} - \vartheta \end{aligned} \quad (49)$$

Nous avons alors

$$df(n^*, 0) = \begin{bmatrix} n^*(1 - n^*) & -\alpha \\ 0 & \beta - \vartheta \end{bmatrix}$$

Ainsi E_1 est stable lorsque $\beta > \vartheta$ et instable lorsque $\beta < \vartheta$.
Ensuite,

$$df(1, 0) = \begin{bmatrix} n^* - 1 & -\alpha \\ 0 & \beta - \vartheta \end{bmatrix}$$

Ainsi E_2 est toujours instable.

Passons maintenant aux point d'équilibres intérieurs. Avant toute chose simplifions les expressions des dérivées partielles. Pour ne pas surcharger les notations nous noterons simplement (n, p) un équilibre intérieur.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial n}(n, p) &= -3n^2 + 2n(1 + n^*) - n^* - \alpha \frac{p^2}{(n+p)^2} \\ &= -3n^2 + 2n(1 + n^*) - n^* - \alpha \left[1 - \frac{\beta}{\vartheta} \right] \frac{np}{(n+p)^2} \quad \text{par 47} \\ &= -3n^2 + 2n(1 + n^*) - n^* - \alpha \frac{np}{(n+p)^2} - \frac{\beta}{\vartheta} \frac{np}{(n+p)^2} \\ &= -3n^2 + 2n(1 + n^*) - n^* - \alpha \frac{np}{(n+p)^2} - \frac{\beta}{\vartheta} \frac{n}{n+p} (n - n^*)(1 - n) \quad \text{par 43} \\ &= -3n^2 + 2n(1 + n^*) - n^* - \alpha \frac{np}{(n+p)^2} - (n - n^*)(1 - n) \quad \text{par 43} \\ &= n(1 + n^* - 2n^2) + \alpha \frac{np}{(n+p)^2} \end{aligned}$$

Et,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial p} &= \beta \frac{n^2}{(n+p)^2} - \vartheta \\ &= \frac{1}{(n+p)^2} [\beta n^2 - \vartheta(n+p)^2] \\ &= \frac{1}{(n+p)^2} [(\beta - \vartheta)n^2 - \vartheta p^2 - 2\vartheta np] \\ &= \frac{1}{(n+p)^2} [\vartheta np - \vartheta p^2 - 2\vartheta np] \quad \text{par 47} \\ &= \frac{1}{(n+p)^2} [\vartheta np - \vartheta p^2 - 2\vartheta np] \quad 47 \\ &= \frac{1}{(n+p)^2} [-\vartheta p^2 - \vartheta np] \\ &= \frac{1}{(n+p)^2} [-(\beta - \vartheta)np - \vartheta np] \quad \text{par 47} \\ &= -\beta \frac{np}{(n+p)^2} \end{aligned}$$

Maintenant le déterminant de $J_i := df(n_i^\circ, p_i^\circ)$ est

$$\det(J_i) = -\beta n_i^\circ (1 + n^* - 2n_i^\circ) \frac{n_i^\circ p_i^\circ}{(n_i^\circ + p_i^\circ)^2}$$

Ainsi sous H, étant donné que $2n_1^\circ < 1 + n^* < 2n_2^\circ$ nous avons

$$\det(J_1) < 0 \quad \det(J_2) > 0$$

Nous en déduisons immédiatement que E_1° est toujours un point selle. Pour E_2° il faut étudier le signe de $\text{Tr}(J_2)$ donné par

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(J_2) &= n_2^\circ(1 + n^* - 2n_2^\circ) + (\alpha - \beta) \frac{n_2^\circ p_2^\circ}{(n_2^\circ + p_2^\circ)^2} \\
&= n_2^\circ(1 + n^* - 2n_2^\circ) + (\alpha - \beta) \frac{(\beta - \vartheta)}{\vartheta} \frac{n_2^\circ n_2^\circ}{(n_2^\circ + p_2^\circ)^2} \quad \text{par 47} \\
&= n_2^\circ(1 + n^* - 2n_2^\circ) + (\alpha - \beta) \frac{(\beta - \vartheta)}{\vartheta} \frac{1}{(1 + p_2^\circ/n_2^\circ)^2} \\
&= n_2^\circ(1 + n^* - 2n_2^\circ) + (\alpha - \beta) \frac{(\beta - \vartheta)}{\vartheta} \frac{1}{(1 + (\beta - \vartheta)/\vartheta)^2} \quad \text{par 47} \\
&= n_2^\circ(1 + n^* - 2n_2^\circ) + \frac{\beta}{\vartheta}(\alpha - \beta) \left(1 - \frac{\vartheta}{\beta}\right)
\end{aligned}$$

Donc en insérant l'expression de n_2° (47)

$$\text{Tr}(J_2) = \frac{1 + n^*}{2} \sqrt{(1 - n^*)^2 - 4\alpha \left(1 - \frac{\vartheta}{\beta}\right)} - \frac{(1 - n^*)^2}{2} + 2\alpha \left(1 - \frac{\vartheta}{\beta}\right) + \frac{\beta}{\vartheta}(\alpha - \beta) \left(1 - \frac{\vartheta}{\beta}\right)$$

En réarrangeant les termes on obtient ainsi

$$\text{Tr}(J_2) = -\frac{1 + n^*}{2} \sqrt{(1 - n^*)^2 - 4\alpha \left(1 - \frac{\vartheta}{\beta}\right)} - \frac{(1 - n^*)^2}{2} + 2\alpha - \alpha \frac{\vartheta}{\beta} - \alpha \frac{\vartheta^2}{\beta^2} - \vartheta \left(1 - \frac{\vartheta}{\beta}\right) \quad (50)$$

Notons $Q = Q(\alpha, \beta, n^*, \vartheta)$ cette quantité. Nous en déduisons que E_2° est asymptotiquement stable dès que $Q > 0$ et instable dès que $Q < 0$.

Références

- [AC92] V.I. Arnold and R. Cooke. *Ordinary Differential Equations*. Springer-Textbook. New York, 1992.
- [Ber17] F. Berthelin. *Équations différentielles*. Enseignement des mathématiques. Cassini, 2017.
- [HK91] J. Hale and H. Koçak. *Dynamics and Bifurcations*. Springer-Verlag, 1991.
- [IP19] L. Isenmann and T. Pecatte. *L'oral à l'agrégation de mathématiques : une sélection de développements*. Références sciences. Ellipses, 2019.
- [Kuz14] Y. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer, 2014.
- [Per92] Lawrence Perko. *Differential equations and dynamical systems* / lawrence perko. *SERBIULA (sistema Librum 2.0)*, 01 1992.
- [SBM12] Moitri Sen, Malay Banerjee, and Andrew Morozov. Bifurcation analysis of a ratio-dependent prey-predator model with the allee effect. *Ecological Complexity*, 11 :12–27, 2012.