Examen de probabilités - sujet 0

Le sujet est construit de manière progressive en termes de difficulté. Traiter convenablement les questions de cours et deux des exercices vous permettra d'avoir une bonne note. Les questions notées avec une étoile sont plus dures ou plus longues que les autres, ne passez pas trop de temps dessus si vous bloquez. Une attention particulière devra être apportée à la clarté et à la concision de la rédaction. Citez bien le nom des résultats que vous utilisez, que ce soient des théorèmes du cours ou des questions précédentes. Si des résultats de TD sont utilisés, ils devront être redémontrés. Bon courage !

Quand cela n'est pas précisé, les variables aléatoires mentionnées sont définies sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1 Questions de cours (environ 7 pts)

On justifiera toutes les réponses, notamment des vrai ou faux (preuve si c'est vrai, contre-exemple si c'est faux). La dernière question comptera plus que les autres dans le barème.

1. Vrai ou faux ? Un événement de probabilité nulle est nécessairement vide.
2. Montrer que la mesure de densité sin (fonction sinus) par rapport à la mesure de Lebesgue est une probabilité sur $([0, \pi/2], \mathcal{B}(0, \pi/2))$.
3. Donner une variable aléatoire réelle qui est dans L^1 mais pas dans L^2.
4. Vrai ou faux ? Il y a une inégalité toujours vraie qui lie $\mathbb{E}(X^2)$ et $\mathbb{E}(X)^2$ (sous-entendu pour toute variable aléatoire réelle X).
5. Donner un exemple de variables aléatoires qui convergent en probabilité mais pas presque sûrement.
6. ($\star$) Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que X^2 a une densité sur $\mathbb{R}_+$, et donner son expression.

2 Exercice 1 (environ 5 pts)

On modélise la date d'anniversaire d'une personne par une variable uniforme dans $\{1, \dots, 365\}$ (on ne prend pas en compte les personnes nées un 29 février). On suppose alors que l'observation des N anniversaires d'étudiants d'une promotion constituée de N étudiants correspond à l'observation de $A_1, \dots, A_N$, qui sont N variables indépendantes de loi uniforme dans $\{1, \dots, 365\}$. On suppose $N < 365$.

1. Soit $E = \{$aucune des N personnes de la promo n'est née le même jour qu'une autre$\}$. En écrivant E en fonction des (A_k), montrer que E est un événement.
2. Montrer que $\mathbb{P}(E) = \frac{365!}{(365-N)!} \frac{1}{365^N}$.
3. En déduire la probabilité que deux personnes de la promotion soient nées le même jour.
4. Pour $N = 23$, on trouve une probabilité supérieure à 1/2. Pourquoi ce problème est-il appelé le *paradoxe des anniversaires* ?

Remarque : pour $N = 62$, on trouve une probabilité supérieure à 99%, vérifiez entre vous !

3 Exercice 2 (environ 5 pts)

Soient $(X_n)_n$ des variables i.i.d de Rademacher, c'est-à-dire telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$. On note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1. En utilisant une inégalité du cours, montrer que pour t positif et $\lambda > 0$:

$$\mathbb{P}(S_n > \lambda) \leq \mathbb{E}(\mathrm{e}^{tS_n})\mathrm{e}^{-t\lambda}.$$

2. Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tS_n})$ pour $t > 0$.
3. En admettant que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\cosh(u) = \frac{\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u}}{2} \leq \mathrm{e}^{u^2/2}$, montrer que $\mathbb{P}(S_n > \lambda) \leq \mathrm{e}^{-\lambda^2/2n}$, puis que $\mathbb{P}(|S_n| > \lambda) \leq 2\mathrm{e}^{-\lambda^2/2n}$.
4. En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, montrer que presque sûrement, il existe N tel que pour tout $n \geq N$,

$$|S_n| \leq \sqrt{4n \ln(n)}.$$

4 Exercice 3 (environ 7 pts)

On considère une suite i.i.d $(U_n)_n$ de variables aléatoires uniformes sur $[0, \theta]$, où $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $\widehat{\theta}_n := \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n U_k$, et $\widetilde{\theta}_n = \max(U_1, \ldots, U_n)$.

1. Donner la densité et la fonction de répartition communes des (U_n).
2. Calculer l'espérance et la variance de $\widehat{\theta}_n$.
3. En utilisant un théorème du cours, montrer que $\widehat{\theta}_n$ converge presque sûrement vers θ.
4. En utilisant un théorème du cours, montrer que $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta)$ converge en loi vers une loi normale à préciser.
5. Calculer, pour $\varepsilon \in [0, \theta]$, la probabilité $\mathbb{P}(\widetilde{\theta}_n < \theta - \varepsilon)$. En déduire que $\widetilde{\theta}_n$ converge en probabilité vers θ. La convergence a-t-elle lieu presque sûrement ?
6. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Trouver $\varepsilon_n(\alpha)$ tel que $\mathbb{P}(\widetilde{\theta}_n < \theta - \varepsilon_n(\alpha)) = \alpha$.
7. ($\star$) À votre avis, si θ est inconnu, et que l'on a observé des réalisations des variables aléatoires $(U_1, \ldots, U_n)$, laquelle des quantités $\widehat{\theta}_n$ ou $\widetilde{\theta}_n$ vaut-il mieux calculer pour connaître avec précision θ ?