Examen de probabilités

CentraleSupélec Rennes

12/02/2026

Le sujet est construit de manière progressive en termes de difficulté. Traiter convenablement les questions de cours et deux des exercices vous permettra d'avoir une bonne note. Les questions notées avec une étoile sont plus longues que les autres, ne passez pas trop de temps dessus si vous bloquez. Une attention particulière devra être apportée à la clarté et à la concision de la rédaction. Citez bien le nom des résultats que vous utilisez, que ce soient des théorèmes du cours ou des questions précédentes. Si des résultats de TD sont utilisés, ils devront être redémontrés. Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, n'hésitez pas à le signaler. Bon courage !

Quand cela n'est pas précisé, les variables aléatoires mentionnées sont définies sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1 Questions de cours

On justifiera toutes les réponses, notamment des vrai ou faux (preuve si c'est vrai, contre-exemple si c'est faux). Les deux dernières questions compteront plus que les autres dans le barème.

1. Montrer qu'un événement indépendant de lui-même est toujours de probabilité 0 ou 1.
2. Vrai ou faux ? Pour X une variable aléatoire dans L^1 réelle et $a \in \mathbb{R}^*$, on a $\mathbb{P}(X > a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$.
3. Donner un exemple de variable aléatoire qui possède une variance, mais pas de moment d'ordre trois.
4. Vrai ou faux ? Il y a une inégalité toujours vraie qui lie $\mathbb{E}(X^3)$ et $\mathbb{E}(X)^3$ (sous-entendu pour toute variable aléatoire réelle X dans L^3).
5. ($\star$) Donner un exemple de variables aléatoires dans L^1 qui convergent presque sûrement mais qui ne convergent pas dans L^1 (indice : chercher à contredire l'hypothèse de domination du théorème de convergence dominée...).
6. ($\star$) Soit X une variable aléatoire réelle de densité $x \mapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ sur $\mathbb{R}$. Quelle est la loi de $1/X$?

2 Exercice 1

La loi $\mathcal{P}(\lambda)$ est la loi de Poisson, c'est-à-dire que si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $\mathbb{P}(X = n) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$.

1. Montrer que si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ avec $\lambda, \mu > 0$ et X, Y indépendantes, alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.
2. Si $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite i.i.d de loi $\mathcal{P}(1)$, en déduire la loi de $\sum_{i=1}^n X_i$ pour $n \geq 1$.
3. En déduire, en utilisant un théorème du cours, que si (Y_n) est une suite de variables aléatoires avec $Y_n \sim \mathcal{P}(n)$, alors $Z_n := \frac{Y_n}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}$ converge en loi vers une loi usuelle.
4. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Trouver un réel q_α (on ne cherchera pas à le décrire explicitement) tel que

$$\mathbb{P}(Y_n \leq n + q_\alpha \sqrt{n}) \xrightarrow[n \to \infty]{} \alpha.$$

3 Exercice 2

On considère $(\varepsilon_n)_n$ une suite i.i.d (indépendantes et de même loi) de variables aléatoires de loi telle que :

$$\mathbb{P}(\varepsilon_1 = 1) = p \text{ et } \mathbb{P}(\varepsilon_1 = -1) = 1 - p,$$

où $p \in [0,1]$, $p \neq 1/2$. On pose $X_0 := 0$ et $X_n = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$. Ce sont des variables aléatoires.

1. Montrer que pour $m \in \mathbb{N}^*$:
$$\mathbb{P}(X_{2m} = 0) = \binom{2m}{m} p^m (1-p)^m \text{ et } \mathbb{P}(X_{2m+1} = 0) = 0.$$
2. En utilisant la formule de Stirling ($n! \sim n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$), calculer un équivalent de $\mathbb{P}(X_{2m} = 0)$ pour $m \to +\infty$, et en déduire que $\sum_{m \geq 1} \mathbb{P}(X_{2m} = 0)$ converge.
3. Montrer que $A = \{\text{Il existe une infinité de } n \text{ pour lesquels } X_n = 0\}$ est un événement et montrer que cet événement est de probabilité nulle.

4 Exercice 3

La loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ désigne la loi normale de moyenne $\mu \in \mathbb{R}$ et de variance $\sigma^2 > 0$. Une variable aléatoire de loi normale est appelée variable *gaussienne*.

1. Soit σ_n une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0. Soit $\mu \in \mathbb{R}$ et $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires telles que $X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_n^2)$. Donner la fonction caractéristique de la variable constante égale à μ et montrer que (X_n) converge en loi vers μ.
2. En déduire que si une suite (X_n) de variables aléatoires telle que $X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_n^2)$ converge ps, en probabilité ou dans L^p, c'est vers μ.

Dans la suite, on verra donc les constantes comme des gaussiennes de variance zéro. Le but de l'exercice est de montrer qu'une limite ps, en probabilité, en norme L^p ou en loi de variables gaussiennes est nécessairement gaussienne.

3. Montrer qu'il suffit de traiter le cas en loi.

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires avec $X_n \sim \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$, avec $(\mu_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(\sigma_n^2) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. On suppose que (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire réelle X.

4. Montrer que la suite (σ_n^2) converge (on étudiera $|\varphi_{X_n}|$). On note σ^2 sa limite.
5. En utilisant la question précédente, montrer que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu_n t}$ converge pour tout $t \in \mathbb{R}$.
6. Montrer par ailleurs que (μ_n) est bornée (on pourra utiliser sans démonstration le fait que pour $Y \sim \mathcal{N}(m, s^2)$, $\mathbb{P}(Y > m) = 1/2$).
7. Montrer que (μ_n) n'a qu'une seule valeur d'adhérence, et en déduire qu'elle converge.
8. Montrer que X a pour loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

* *
*