Examen de probabilités - Correction

Arthur Maritch-Roy

1 Questions de cours

1. Soit A un événement indépendant de lui-même. Alors $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A)^2$ par indépendance. Donc $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$, A est négligeable ou presque sûr.
2. Faux. Il faut supposer a et X positifs. Par exemple, pour $a = 1$ et $X = -1$, le résultat est faux.
3. Si X suit la loi zêta de paramètre 4, vue en TD, alors $\mathbb{P}(X = n) = Cn^{-4}$, donc $n^2\,\mathbb{P}(X = n) = Cn^{-2}$, qui est sommable donc X a une variance. Cependant, $n^3\,\mathbb{P}(X = n) = Cn^{-1}$ n'est pas sommable donc X n'a pas de moment d'ordre trois.
4. Faux. On ne peut pas appliquer l'inégalité de Jensen car la fonction cube n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$. Si le résultat était vrai, alors en appliquant le même résultat à $-X$ on devrait toujours avoir égalité. Or ce n'est pas le cas, par exemple pour $X \sim \mathcal{U}(0, 1)$.
5. Prendre des (X_n) indépendantes avec X_n qui vaut n^2 avec probabilité $1/n^2$, et 0 avec probabilité $1 - 1/n^2$. Alors par le lemme de Borel-Cantelli, (X_n) converge presque sûrement vers 0. Cependant, pour tout n, $\mathbb{E}(X_n) = 1$ donc (X_n) ne peut pas tendre dans L^1 vers 0.
6. Soit h une fonction continue bornée. On cherche la loi de $1/X$ donc on va utiliser la caractérisation de la loi par les fonctions test et calculer

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(h(1/X)) &= \int_{\mathbb{R}} h(1/x) \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{0} h(1/x) \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} h(1/x) \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{0} h(y) \frac{1}{\pi(1+(\frac{1}{y})^2)} \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y + \int_{0}^{+\infty} h(y) \frac{1}{\pi(1+(\frac{1}{y})^2)} \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} h(y) \frac{1}{\pi(1+y^2)}\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

On reconnaît la densité de X. Ainsi, $1/X$ a la même loi que X (c'est la loi de Cauchy).

2 Exercice 1

1. Pour déterminer la loi de $X + Y$, on va calculer sa série génératrice. Soit $t \in \mathbb{R}$, par indépendance :

$$\mathrm{G}_{X+Y}(t) = \mathrm{G}_X(t)\mathrm{G}_Y(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}\mathrm{e}^{\mu(t-1)} = \mathrm{e}^{(\lambda+\mu)(t-1)}.$$

On reconnaît la série génératrice de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$. Puisque la fonction génératrice caractérise la loi, on obtient le résultat.

2. Par récurrence, en utilisant le résultat de la question précédente, on voit que $\sum_{i=1}^{n} X_i$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(n)$.

3. Si Y_n a une telle loi, alors les (Y_n) ont même loi que les $(V_n := \sum_{i=1}^n X_i)$. Les (X_n) sont i.i.d et dans L^2 avec $\mathbb{E}(X_1) = \mathrm{Var}(X_1) = 1$. Ainsi, d'après le théorème limite central,
$$\sqrt{n}(\overline{X}_n - 1) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1).$$
Or $\sqrt{n}(\overline{X}_n - 1) = \frac{V_n}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}$ a même loi que Z_n. Ainsi, les $(Z_n)_n$ convergent également en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$.
4. Soit $q \in \mathbb{R}$. En utilisant le fait que la convergence en loi entraîne la convergence simple des fonctions de répartition, et le résultat de la question précédente :
$$\mathbb{P}(Y_n \leq n + q\sqrt{n}) = \mathbb{P}(Z_n \leq q) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) \leq q).$$
En prenant q le quantile d'ordre α de la loi normale centrée réduite (c'est-à-dire le réel q tel que $\int_{-\infty}^q \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}x = \alpha$), on obtient le résultat voulu.

3 Exercice 2

1. On remarque que X_n a la même parité que n. En particulier, si n est impair X_n ne peut valoir 0. Ainsi pour $m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_{2m+1} = 0) = 0$. Maintenant, pour $m \in \mathbb{N}$, être au point 0 au bout de $2m$ étapes correspond à avoir eu autant de ε_i qui valent 1 que de ε_i qui valent -1. Ainsi, la probabilité $\mathbb{P}(X_{2m} = 0)$ correspond à la probabilité qu'une loi binomiale $\mathcal{B}(2m, p)$ vaille m, ce qui donne la formule souhaitée.
2. On utilise le fait que $\binom{2m}{m} = \frac{(2m)!}{(m!)^2}$, ce qui donne, en utilisant la formule de Stirling :
$$\mathbb{P}(X_{2m} = 0) \sim_{m\to\infty} \frac{[4p(1-p)]^m}{\sqrt{\pi m}}.$$
Puisque $p \neq 1/2$, $4p(1-p) < 1$, ainsi $\mathbb{P}(X_{2m} = 0) \leq [4p(1-p)]^m$ qui est le terme général d'une série géométrique convergente. Par comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{m\geq 0} \mathbb{P}(X_{2m} = 0)$ converge.
3. L'ensemble A est un événement en tant que limite supérieure des événements $\{X_n = 0\}$. Puisque la série des $\mathbb{P}(X_n = 0)$ converge, et d'après le lemme de Borel-Cantelli, $\mathbb{P}(\limsup_{m\to\infty}\{X_{2m} = 0\}) = 0$, ce qui veut dire que $\mathbb{P}(A) = 0$.

4 Exercice 3

1. On va utiliser le théorème de Lévy. Soit $t \in \mathbb{R}$:
$$\varphi_{X_n}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu t - \frac{1}{2}\sigma_n^2 t^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu t}.$$
On reconnaît la fonction caractéristique de la variable aléatoire constante égale à μ. Le théorème de Lévy assure donc que (X_n) converge en loi vers μ.
2. Si on a une telle convergence, alors elle entraîne la convergence en loi, ce qui implique, par unicité de la limite ps, en probabilité, en norme ou en loi que la convergence a nécessairement lieu vers μ.
3. Si on traite le cas en loi, alors puisque les autres modes de convergence entraînent la convergence en loi, et par unicité de la limite, la limite ps, en probabilité ou en norme sera la limite en loi, c'est-à-dire une loi normale.

4. D'après le sens direct du théorème de Lévy, on sait que $e^{i\mu_n t - \frac{1}{2}\sigma_n^2 t^2}$ converge vers une limite complexe pour tout $t \in \mathbb{R}$. En passant au module, on en déduit que $e^{-\frac{1}{2}\sigma_n^2 t^2}$ converge, puis en passant au logarithme, on obtient que σ_n^2 converge vers une limite dans $[0, +\infty]$. Si cette limite est infinie, alors la fonction caractéristique de X devrait être 0 sur $\mathbb{R}^*$, ce qui n'est pas possible car elle doit valoir 1 en zéro et être continue. Ainsi $(\sigma_n^2)_n$ converge vers une limite finie σ^2.
5. D'après la question précédente, on sait que $e^{i\mu_n t}$ converge vers $e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}\varphi_X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
6. Supposons pour une contradiction qu'il existe une sous-suite $(\mu_{\varphi(n)})$ qui diverge vers $+\infty$ (le cas de la divergence vers $-\infty$ se traite de la même manière). Soit $A > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\mu_{\varphi(n)} > A$. Ainsi, pour tout $n > N$,

$$\mathbb{P}(X_{\varphi(n)} \geq A) \geq \mathbb{P}(X_{\varphi(n)} > \mu_{\varphi(n)}) = 1/2.$$

   Quand n tend vers l'infini, par le lemme de portemanteau, on a donc $\mathbb{P}(X > A) \geq 1/2$ pour tout $A > 0$, ce qui est absurde. Ainsi (μ_n) est bornée.
7. Soient a et b deux valeurs d'adhérence de la suite (μ_n). Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a alors $e^{ita} = e^{itb}$. En dérivant et en évaluant en 0, on trouve $a = b$. La suite (μ_n) est bornée et admet une seule valeur d'adhérence ; elle converge.
8. D'après les questions 3 et 7, la fonction caractéristique de X_n converge simplement vers celle de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. D'après le théorème de Lévy, on a bien la convergence en loi souhaitée.