

Sujet 0 - Correction

Arthur Maritch-Roy

1 Questions de cours

1. Faux, sur $([0, 1], \mathcal{B}(0, 1), \lambda)$, l'événement $\{0\}$ est de probabilité 0 mais n'est pas vide.
2. Pour que cette mesure soit une mesure de probabilité, il faut et il suffit que \sin soit mesurable positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, ce qui est le cas (la mesurabilité vient de sa continuité), et que son intégrale vaille 1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, ce qui est le cas aussi.
3. Soit X une variable aléatoire dont la loi est la loi zêta de paramètre 3, c'est-à-dire que $\mathbb{P}(X = n) = \zeta(3)n^{-3}$. Alors $n\mathbb{P}(X = n)$ est sommable mais pas $n^2\mathbb{P}(X = n)$, ainsi X a une espérance mais pas de variance.
4. Vrai, c'est l'inégalité de Jensen : $\mathbb{E}(X^2) \geq \mathbb{E}(X)^2$.
5. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes avec $X_n \sim \mathcal{B}(1/n)$. Alors elles convergent en probabilité vers 0 et par le lemme de Borel-Cantelli, elles ne convergent pas presque sûrement car $\sum_n 1/n = +\infty$.
6. Il s'agit de la question 1 de l'exercice 22 du TD que l'on a corrigé ensemble.

2 Exercice 1

L'énoncé nous dit qu'il existe un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et des variables aléatoires A_1, \dots, A_N construites sur cet espace de probabilité, qui sont indépendantes, et de loi commune la loi uniforme sur $\{1, \dots, 365\}$.

1. Puisque

$$E = \bigcap_{i=1}^N \bigcap_{j \neq i} \{A_i \neq A_j\},$$

et que $\{A_j = A_i\} = \bigcup_{k=1}^N (\{A_i = k\} \cap \{A_j = k\})$, E est un événement.

2. Pour calculer $\mathbb{P}(E)$, puisque (A_1, \dots, A_N) suit une loi uniforme sur $\{1, \dots, 365\}^N$, on dit que c'est le nombre de N -uplets de $\{1, \dots, 365\}$ dont tous les éléments sont distincts, sur le nombre de N -uplets total (365^N) . Pour choisir un N -uplet dont tous les éléments sont distincts, on a 365 choix pour le premier, 364 pour le deuxième, etc jusqu'au N -ième où l'on a $365 - N + 1$ choix (à chaque étape on ne peut pas choisir une date parmi celles déjà choisies), ce qui fait en tout $365 \times \dots \times (365 - N + 1) = \frac{365!}{(365-N)!}$. On a bien le résultat voulu.
3. En passant au complémentaire, la probabilité souhaitée est $1 - \mathbb{P}(E) = 1 - \frac{365!}{(365-N)!} \frac{1}{365^N}$.
4. Intuitivement, cela peut sembler peu comparé au nombre de jours dans une année. Le paradoxe peut venir du fait que l'on peut naïvement penser que cette probabilité est la probabilité que l'une des personnes ait son anniversaire qui tombe le même jour qu'une date donnée, or ici la date commune peut être n'importe laquelle.

3 Exercice 2

1. D'après l'inégalité de Markov, et par croissance de la fonction $t \mapsto e^{\lambda t}$:

$$\mathbb{P}(S_n > t) = \mathbb{P}(e^{tS_n} > e^{t\lambda}) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{tS_n})}{e^{\lambda t}}.$$

2. Pour $t > 0$, par indépendance et identique distribution, on a

$$\mathbb{E}(e^{tS_n}) = \mathbb{E}(e^{t\sum_{i=1}^n X_i}) = \mathbb{E}(e^{tX_1})^n.$$

Or puisque les (X_k) sont des Rademacher,

$$\mathbb{E}(e^{tX_1}) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} = \cosh(t).$$

Donc $\mathbb{E}(e^{tS_n}) = \cosh(t)^n$.

3. En utilisant l'inégalité de l'énoncé, on a donc

$$\mathbb{P}(S_n > \lambda) \leq e^{-\lambda t} e^{nt^2/2}.$$

Le membre de gauche ne dépend pas de t , on peut optimiser en t , et on trouve un t optimal pour $t = 2\lambda/n$, qui donne l'inégalité voulue. Ensuite, on écrit

$$\mathbb{P}(|S_n| > \lambda) = \mathbb{P}(S_n > \lambda) + \mathbb{P}(S_n < -\lambda),$$

mais puisque S_n a même loi que $-S_n$, on peut majorer ceci par 2 fois la borne trouvée précédemment.

4. Considérons, pour $n \in \mathbb{N}$ l'événement $A_n = \{|S_n| > \sqrt{4n \ln(n)}\}$. Par la question précédente, on a

$$\mathbb{P}(A_n) \leq 2e^{-\frac{4n \ln(n)}{2n}} = 2e^{-2 \ln(n)} = \frac{2}{n^2},$$

qui est le terme d'une série convergente. Ainsi, par le lemme de Borel-Cantelli, presque sûrement, seulement un nombre fini des (A_n) se réalise. Autrement dit, presque sûrement, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n > N$, A_n ne se réalise pas, ce qui correspond au résultat à montrer.

4 Exercice 3

1. La densité des (U_i) est $\frac{1}{\theta} \mathbf{1}_{[0, \theta]}$, leur fonction de répartition est $u \mapsto \frac{u}{\theta} \mathbf{1}_{[0, \theta]}(u) + \mathbf{1}_{] \theta, \infty[}(u)$.
2. Par linéarité de l'espérance et identique distribution, $\mathbb{E}(\hat{\theta}_n) = 2 \mathbb{E}(U_1) = 2 \frac{\theta}{2} = \theta$. De même, $\text{Var}(\hat{\theta}_n) = \frac{4}{n} \text{Var}(U_1) = \frac{4}{n} \frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n}$.
3. D'après la loi des grands nombres, puisque les (U_i) sont i.i.d et avec une espérance, on a la convergence presque sûre de $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i$ vers $\mathbb{E}(U_1) = \frac{\theta}{2}$. En multipliant par 2, on obtient le résultat voulu.
4. Les (U_i) sont i.i.d avec un moment d'ordre deux. D'après le théorème limite central, $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$ converge en loi vers une loi normale $\mathcal{N}(0, 4 \text{Var}(U_1)) = \mathcal{N}(0, \theta^2/3)$.
5. Soit $\varepsilon \in [0, \theta]$.

$$\mathbb{P}(\max(U_1, \dots, U_n) < \theta - \varepsilon) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{U_i < \theta - \varepsilon\}\right).$$

Par indépendance et identique distribution, on a donc

$$\mathbb{P}(\tilde{\theta}_n < \theta - \varepsilon) = \mathbb{P}(U_1 < \theta - \varepsilon)^n = \left(1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n.$$

Pour $\varepsilon > 0$, on a donc $\mathbb{P}(|\tilde{\theta}_n - \theta| > \varepsilon) = \mathbb{P}(\tilde{\theta}_n - \theta > \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, ce qui est bien la convergence en probabilité souhaitée. La convergence est même presque sûre d'après le lemme de Borel-Cantelli puisque $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|\tilde{\theta}_n - \theta| > \varepsilon)$ est une série géométrique convergente.

6. En inversant $(1 - \frac{\varepsilon_n(\alpha)}{\theta})^n = \alpha$, on trouve $\varepsilon_n(\alpha) = \theta(1 - \alpha^{1/n})$.
7. Le résultat de la question 4. nous permettrait d'avoir un intervalle de confiance sur θ comme on l'a fait dans le cours, mais seulement pour n tend vers l'infini. De plus, la variance de notre méthode d'estimation dépend du paramètre, qui est censé être inconnu. Par ailleurs, notre estimateur $\hat{\theta}_n$ peut être supérieur à la valeur réelle de θ , alors que pour la deuxième méthode, deux de ces problèmes n'existent plus : la borne n'est pas asymptotique et l'estimation est forcément plus petite que θ . Même si la borne dépend de θ et ne peut donc pas être utilisée en pratique, on voit quand même qu'elle tend vite vers 0 avec n .