

Équation de
Schrödinger :
présentation
et premières
propriétés

Arthur
Maritch-Roy,
Martin Molter

Introduction

Définition et
forme
intégrale

Groupe de
Schrödinger

Propriétés de
régularité

Équation de Schrödinger : présentation et premières propriétés

Arthur Maritch-Roy, Martin Molter

Un peu d'histoire

Équation de Schrödinger :
présentation
et premières
propriétés

Arthur
Maritch-Roy,
Martin Molter

Introduction

Définition et
forme
intégrale

Groupe de
Schrödinger

Propriétés de
régularité

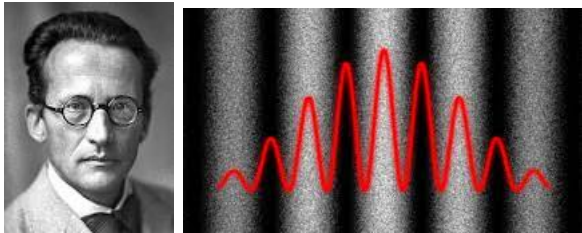


Figure – Erwin Schrödinger et expérience des fentes d'Young.

Formalisme de la physique

Équation de Schrödinger :
présentation
et premières
propriétés

Arthur
Maritch-Roy,
Martin Molter

Introduction

Définition et
forme
intégrale

Groupe de
Schrödinger

Propriétés de
régularité

Fonction d'onde

Pour une particule quelconque :

$$\Psi(x, t) \in \mathbb{C}$$

Densité de probabilité associée : $|\Psi(x, t)|^2$.

Équation de Schrödinger

Pour une particule de masse m dans un potentiel V :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi = V(x, t) \Psi.$$

Passage de l'équation en Fourier

Équation de Schrödinger :
présentation
et premières
propriétés

Arthur
Maritch-Roy,
Martin Molter

Introduction

Définition et
forme
intégrale

Groupe de
Schrödinger

Propriétés de
régularité

Équation de Schrödinger

$$\begin{cases} \partial_t u &= i \Delta u \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d). \end{cases} \quad (1)$$

$$\partial_t u = i \Delta u \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \partial_t \widehat{u}(\xi, t) = -4\pi^2 i |\xi|^2 \widehat{u}(\xi, t),$$

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1} \left(\widehat{u}_0 e^{-4i\pi^2 |\cdot|^2 t} \right) (x).$$

Forme intégrale de la solution

Équation de Schrödinger :
présentation
et premières
propriétés

Arthur
Maritch-Roy,
Martin Molter

Introduction

Définition et
forme
intégrale

Groupe de
Schrödinger

Propriétés de
régularité

Définition

$$\widehat{e^{-4\pi^2it|x|^2}} = \frac{e^{-|\xi|^2/4it}}{(4\pi it)^{d/2}} \quad (\text{dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)) .$$

Forme intégrale

$$u(x, t) = e^{it\Delta} u_0(x) := \left(\frac{e^{-|\cdot|^2/4it}}{(4\pi it)^{d/2}} * u_0 \right) (x) .$$

Un exemple

Équation de Schrödinger :
présentation
et premières
propriétés

Arthur
Maritch-Roy,
Martin Molter

Introduction

Définition et
forme
intégrale

Groupe de
Schrödinger

Propriétés de
régularité

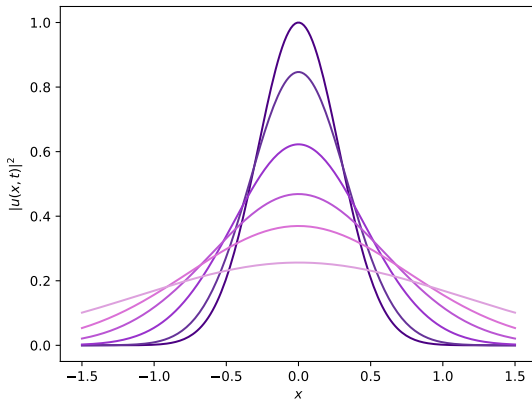


Figure – Tracé de $|u(x, t)|^2$ en fonction de x pour plusieurs instants t , avec $u_0(x) = e^{-\pi|x|^2}$.

Premières propriétés

Équation de Schrödinger :
présentation
et premières
propriétés

Arthur
Maritch-Roy,
Martin Molter

Introduction

Définition et
forme
intégrale

Groupe de
Schrödinger

Propriétés de
régularité

Proposition

Si u est solution de (1) pour une condition initiale donnée, alors

- $u_1 = e^{i\theta} u$, $\theta \in \mathbb{R}$
- $u_2 = u(\cdot - x_0, \cdot - t_0)$
- $u_3(x, t) = u(Ax, t)$, $AA^T = I_d$
- $u_4(x, t) = u(x - 2kt, t) e^{i(kx - |k|^2 t)}$, $k \in \mathbb{R}^d$
- $u_5(x, t) = \lambda^{n/2} u(\lambda x, \lambda^2 t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- $u_6(x, t) = \frac{1}{(\alpha + \omega t)^{n/2}} e^{\frac{i\omega|x|^2}{4(\alpha + \omega t)}} u\left(\frac{\gamma + \theta t}{\alpha + \omega t}, \frac{x}{\alpha + \omega t}\right)$, $\alpha\theta - \omega\gamma = 1$

sont aussi solution (pour une autre condition initiale).

Groupe de Schrödinger

Équation de Schrödinger :
présentation
et premières
propriétés

Arthur
Maritch-Roy,
Martin Molter

Introduction

Définition et
forme
intégrale

Groupe de
Schrödinger

Propriétés de
régularité

Proposition

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{it\Delta}$ est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^d)$
- $e^{i0\Delta} = \text{Id}$
- Pour tous $t, s \in \mathbb{R}$,

$$e^{it\Delta}e^{is\Delta} = e^{i(t+s)\Delta}$$

En particulier, $(e^{it\Delta})^{-1} = e^{-it\Delta} = (e^{it\Delta})^*$.

- Pour $f \in L^2$, la fonction $t \mapsto e^{it\Delta}f$ est continue de \mathbb{R} dans L^2 .

$G = \{e^{it\Delta}, t \in \mathbb{R}\}$ est un C^0 -semigroupe unitaire, appelé **groupe de Schrödinger**.

Régularité sur les espaces de Lebesgue

Équation de Schrödinger :
présentation
et premières
propriétés

Arthur
Maritch-Roy,
Martin Molter

Introduction

Définition et
forme
intégrale

Groupe de
Schrödinger

Propriétés de
régularité

Lemme

Si $t \neq 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et $p \in [1, 2]$, alors $e^{it\Delta} \in \mathcal{L}_c(L^p, L^q)$, et pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$:

$$\|e^{it\Delta} f\|_q \leq c |t|^{-\frac{d}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|f\|_p .$$

Théorème (Riesz-Thorin)

Soient $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, \infty]$, $T \in \mathcal{L}_c(L^{p_0}, L^{q_0}) \cap \mathcal{L}_c(L^{p_1}, L^{q_1})$.

Pour $\theta \in [0, 1]$: $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ et $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$.

Alors $T \in \mathcal{L}_c(L^p, L^q)$, et :

$$\|T\|_{\mathcal{L}_c(L^p, L^q)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}_c(L^{p_0}, L^{q_0})}^{1-\theta} \|T\|_{\mathcal{L}_c(L^{p_1}, L^{q_1})}^{\theta} .$$

Régularité sur les espaces de Sobolev

Équation de Schrödinger :
présentation
et premières propriétés

Arthur
Maritch-Roy,
Martin Molter

Introduction

Définition et
forme
intégrale

Groupe de
Schrödinger

Propriétés de
régularité

Théorème

Soit $t \neq 0$, $p \geq 1$.

- Il existe $f \in L^p$ telle que $e^{it\Delta} f \notin L^p$.
- Il existe $f \in L^2$ telle que $e^{it\Delta} f \notin L^p$.

Par contre, pour $s > 0$, $e^{it\Delta}$ est une isométrie de $H^s(\mathbb{R}^d)$.