

# TD probabilités

Arthur Maritch-Roy

## 1 Espaces de probabilité

**Exercice 1.** On lance un dé équilibré jusqu'à obtenir un 6. Quelle est la probabilité que tous les lancers obtenus jusqu'alors aient été impairs ? On modélisera convenablement l'expérience, c'est-à-dire que l'on précisera l'espace de probabilité sur lequel on travaille.

**Exercice 2.** On considère une infinité de lancers de pile ou face successifs. Modéliser cette expérience, et montrer que la probabilité d'observer n'importe quelle suite finie de pile/face au moins une fois est égale à 1.

**Exercice 3.** Est-il possible de trouver trois dés numérotés 1,2,3 tels que les probabilités que 1 gagne sur 2, que 2 gagne sur 3 et que 3 gagne sur 1 soient toutes les trois supérieures à  $1/2$  (on entend qu'un dé gagne sur l'autre si le résultat de l'un est supérieur à celui de l'autre) ? On détaillera bien l'espace de probabilité et les événements sur lesquels on travaille (on entend qu'un dé gagne sur l'autre si le résultat).

**Exercice 4.** On tire deux nombres au hasard dans l'intervalle  $[0, 1]$  de manière uniforme. Quelle est la probabilité que ces deux nombres soient espacés d'au moins  $1/2$ . On commencera bien sûr par modéliser l'expérience.

**Exercice 5.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité, et  $(\mathcal{F}_n)_n$  une famille de sous-tribus de  $\mathcal{F}$  indépendantes. On considère  $\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \sigma \left( \bigcup_{k \geq n} \mathcal{F}_k \right)$ , appelée tribu asymptotique des  $(\mathcal{F}_n)_n$ .

1. Montrer que les tribus  $(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n, \mathcal{F}_\infty)$  sont indépendantes pour tout  $n$ .
2. En déduire que les tribus  $(\mathcal{F}_n)_{n \leq \infty}$  sont indépendantes.
3. Via le lemme des coalitions, montrer que  $\mathcal{F}_\infty$  est indépendante d'elle même.
4. Que peut-on dire des événements de  $\mathcal{F}_\infty$  ?

**Exercice 6.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé, on note  $p_1, \dots, p_r$  ses diviseurs premiers. On pose  $\Omega = \{1, \dots, n\}$  et on considère l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ , où  $\mathbb{P}$  est la mesure uniforme sur  $\Omega$ .

1. Pour  $m \leq n$ , donner la probabilité d'être un multiple de  $m$ .
2. Montrer que la famille d'événements "être un multiple de  $p_i$ " est une famille d'événements mutuellement indépendants.
3. En déduire la probabilité de l'événement "être premier avec  $n$ ", puis le nombre d'entiers de  $\{1, \dots, n\}$  premiers avec  $n$ .

**Exercice 7.** Soit  $s > 1$ . On définit  $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s}$ , on se place sur  $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ .

1. Montrer qu'il existe une unique probabilité  $\mathbb{P}$  sur cet espace telle que  $\mathbb{P}(\{n\}) = \zeta(s)^{-1} n^{-s}$ .
2. Pour  $m \in \mathbb{N}^*$ , on définit  $A_m = m\mathbb{N}^*$ . Calculer  $\mathbb{P}(A_m)$ .
3. Montrer que si les  $(p_i)_{1 \leq i \leq r}$  sont des nombres premiers distincts, les  $(A_{p_i})$  sont mutuellement indépendants.
4. En déduire la relation :

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} \left( 1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1}$$

**Exercice 8.** Comment améliorer le résultat de l'exercice 2 avec le lemme de Borel-Cantelli ?

**Exercice 9.** En 2021, l'opposition au vaccin signale que 40% des nouveaux contaminés par le Covid-19 en Israël était pourtant vaccinée. En supposant qu'alors 60% de la population est vaccinée, et que les contaminations représentent 1% de la population, peut-on vraiment dire que 40% est inquiétant ?

**Exercice 10.** Soit un feu tricolore qui est vert 25 secondes, puis est orange pendant 5 secondes et rouge pendant trente secondes. On suppose qu'au feu vert, un automobiliste passe 99% du temps, au feu orange 30% et au feu rouge 1%. Quelle est la probabilité qu'un automobiliste passe sans s'arrêter ?

## 2 Variables aléatoires

**Exercice 11.** On se place sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . On considère des événements  $(A_1, \dots, A_n)$ , et  $U = \bigcup_{i=1}^n A_i$ .

1. Pour  $A$  un événement, montrer que la fonction  $\mathbf{1}_A$  (qui vaut 1 sur  $A$  et 0 sur son complémentaire) est une variable aléatoire et donner sa loi.
2. Si  $A$  et  $B$  sont deux événements, écrire  $\mathbf{1}_{A \cap B}$  et  $\mathbf{1}_{A \cup B}$  en fonction de  $\mathbf{1}_A$  et  $\mathbf{1}_B$ .
3. En déduire une expression de  $\mathbf{1}_U$  puis en déduire la formule du crible vue en cours (on utilisera l'espérance).

**Exercice 12.** Soient  $X, Y$  deux variables aléatoires réelles définies sur un même espace de probabilité. Montrer que  $Y$  est  $\sigma(X)$  mesurable si et seulement s'il existe une fonction mesurable  $h$  telle que  $Y = h(X)$ . On utilisera l'argument classique de théorie de la mesure qui consiste à commencer à travailler avec des indicatrices, puis des fonctions étagées, puis à approximer une fonction mesurable positive par des fonctions étagées.

**Exercice 13.** On considère le jeu suivant : on dispose d'un dé classique, que l'on lance. On peut choisir ou non de le relancer, et ce deux fois (ce qui fait trois lancers en tout). On cherche à obtenir le résultat le plus haut possible en moyenne. Modéliser cette expérience. On commencera par définir un espace de probabilité convenable puis une variable aléatoire qui correspondra à notre stratégie. On cherchera à avoir son espérance la plus haute possible.

**Exercice 14.** Voyons comment on peut créer "concrètement" un nombre aléatoire continu entre 0 et 1 de manière uniforme. On se place d'abord sur l'espace de probabilité  $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}, \mathcal{C}, \mathbb{P})$ , où  $\mathcal{C}$  est la tribu cylindrique et  $\mathbb{P}$  la probabilité associée. On considère alors

$$X : \omega = (\varepsilon_n)_{n \geq 1} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n},$$

On rappelle alors que l'application  $X$  est bijective de  $\Omega$  dans  $[0, 1]$ . On note aussi  $X_N(\omega)$  la même somme que précédemment, mais tronquée à l'ordre  $N$ .

1. Montrer que les  $X_N$  et  $X$  sont des variables aléatoires.
2. Donner la loi de  $X_N$  pour tout  $N$ .
3. En déduire  $\mathbb{P}(X_N \leq x)$  pour tout  $x \in [0, 1]$ .
4. En déduire la loi de  $X$ .

### 3 Lois usuelles

**Exercice 15.** On dit qu'une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  est *sans mémoire* si pour tout couple d'entiers  $(n, k)$ , on a

$$\mathbb{P}(X > n + k | X > n) = \mathbb{P}(X > k).$$

1. Soit  $X \in \mathbb{N}^*$ . Si  $X$  est sans mémoire, montrer que  $(\mathbb{P}(X > n))_n$  est une suite géométrique.
2. En déduire l'ensemble des lois possibles pour une variable aléatoire sans mémoire dans  $\mathbb{N}^*$ .

**Exercice 16.** On dit qu'une variable aléatoire réelle positive est *sans mémoire* si pour tout couple  $(s, t)$  de réels positifs, on a :

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \mathbb{P}(X > s).$$

1. (On peut admettre cette question dans un premier temps). Soit  $G : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que  $G(t + s) = G(t)G(s)$  pour tous  $t, s > 0$ , décroissante, avec pour limites 1 en 0 et 0 en l'infini. Montrer qu'il existe  $\lambda > 0$  tel que  $G(t) = e^{-\lambda t}$  pour tout  $t > 0$ .
2. En déduire que les seules lois sans mémoire sur  $\mathbb{R}_+$  sont les lois exponentielles.

**Exercice 17.** Soit  $U$  qui suit une loi uniforme sur  $[0, 1]$ . Quelle est la loi de  $-\log(U)/\alpha$  ( $\alpha > 0$ ).

**Exercice 18.** Soient  $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$  et  $Y \sim \mathcal{E}(\mu)$  deux variables indépendantes. Quelle est la loi de  $\min(X, Y)$  ?

**Exercice 19.** On lance  $n$  fois de suite une pièce déséquilibrée (la probabilité de faire pile est  $p$ ). Quelle est la probabilité que le nombre de pile obtenu soit pair ?

**Exercice 20.** La loi de Rayleigh de paramètre  $\sigma$  est la loi de densité  $x \mapsto \frac{x}{\sigma^2} \exp(-x^2/2\sigma^2)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

1. Montrer que c'est bien une densité de probabilité.
2. Montrer que si  $U$  suit une loi uniforme sur  $[0, 1]$ ,  $\sigma \sqrt{-2 \log(U)}$  suit une loi de Rayleigh de paramètre  $\sigma$ .

### 4 Espérance, moments, transformées exponentielles

**Exercice 21.** Trouver la constante  $a$  telle que  $x \mapsto \frac{a}{1+x^2}$  soit une densité de probabilité sur  $\mathbb{R}$ . La loi ainsi obtenue admet-elle une espérance ?

**Exercice 22.** 1. Soit  $X$  une variable de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Donner la densité de  $X^2$  (on calculera  $\mathbb{E}(h(X^2))$  pour  $h$  une fonction continue bornée).

2. (difficile) Soient  $X_1, \dots, X_d$  des variables i.i.d de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Donner la densité de  $X_1^2 + \dots + X_d^2$ . La loi en question est appelée *loi du khi-deux* à  $d$  degrés de liberté.
3. En particulier, à quelle loi usuelle correspond la loi du khi-deux à 2 degrés de liberté ?

**Exercice 23.** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, soit  $x \in [0, 1]$ . On considère  $(X_1, \dots, X_n)$  des variables aléatoires indépendantes de loi  $\mathcal{B}(x)$ .

1. Montrer que  $p_n := \mathbb{E} \left( f \left( \frac{S_n}{n} \right) \right)$  est un polynôme en  $x$ .
2. En utilisant la continuité uniforme de  $f$  et l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que  $p_n$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ .

On vient de montrer que l'ensemble des polynômes est dense dans  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  muni de  $\|\cdot\|_\infty$ . En translatant, on vérifie que c'est vrai sur tout segment  $[a, b]$ .

**Exercice 24.** Soient  $X, Y$  deux variables aléatoires presque sûrement bornées.

1. Rappeler pourquoi  $X$  et  $Y$  admettent des moments à tout ordre.
2. On suppose que  $\mathbb{E}(X^k) = \mathbb{E}(Y^k)$  pour tout  $k$ . Montrer que  $\mathbb{E}(f(X)) = \mathbb{E}(f(Y))$  pour toute fonction continue  $f$ .
3. En déduire que  $X$  et  $Y$  ont même loi.

Une variable aléatoire bornée est donc caractérisée par ses moments.

**Exercice 25.** On rappelle que la loi zêta de paramètre  $s > 1$  est la loi sur  $\mathbb{N}^*$  telle que  $\mathbb{P}(\{n\}) = (\sum_{k \in \mathbb{N}^*} k^{-s})^{-1} n^{-s}$ . Si  $X$  suit une loi zêta de paramètre  $s$ , à quels ordres admet-elle des moments? Même question pour les lois à densité  $f_\alpha : x \mapsto (-1 - \alpha)x^\alpha \mathbf{1}_{x>1}$ , pour  $\alpha < -1$ .

**Exercice 26.** 1. Calculer la fonction génératrice d'une loi de Poisson  $\mathcal{P}(\lambda)$ .  
 2. En déduire que si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives  $\mathcal{P}(\lambda)$  et  $\mathcal{P}(\mu)$ ,  $X + Y$  a pour loi  $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$ .

**Exercice 27.** En admettant que la fonction caractéristique de la loi normale  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$  est  $x \mapsto e^{imx - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2}$ , donner la loi :

1. de la somme de deux variables indépendantes de lois respectives  $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$  et  $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ ,
2. de  $\alpha X + \beta$ , où  $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ .
3. Une somme de variables gaussiennes est-elle toujours constante ou gaussienne?

**Exercice 28.** Soit  $(X_n)_n$  une suite de variables aléatoires réelles i.i.d avec une espérance, et  $N$  une variable aléatoire indépendante des  $(X_n)$  et intégrable également. On pose  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ .

1. Montrer que  $\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(N) \mathbb{E}(X_1)$
2. Montrer que  $G_{S_N} = G_N \circ G_{X_1}$ .
3. Que peut-on dire si les  $X_n$  sont des variables de Bernoulli de paramètre  $p$ , et si  $N$  est une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ ?

## 5 Convergence de variables aléatoires

**Exercice 29.** Soient  $(X_n), (Y_n)$  deux suites de variables aléatoires réelles. On suppose que  $(X_n)_n$  converge en loi vers une variable aléatoire  $X$ , et que  $(Y_n)$  converge en loi et donc en probabilité vers une constante  $y$ .

1. Montrer que le couple  $(X_n, Y_n)$  converge en loi vers  $(X, y)$ . On travaillera avec  $\mathbb{E}(h(X_n, Y_n))$ , pour  $h$  lipschitzienne bornée, et on le comparera à  $\mathbb{E}(h(X_n, y))$  dans un premier temps.
2. Application : soit  $(X_n)_n$  une suite i.i.d. de variables  $L^2$ . On note  $m$  leur moyenne et  $\sigma^2$  leur variance. Donner la limite en loi de  $n^\alpha(\overline{X_n} - m)$  selon la valeur de  $\alpha \leq 1/2$ .
3. Trouver un contre-exemple dans le cas où la limite en loi de  $(Y_n)$  n'est pas une constante.

**Exercice 30.** La loi de Gumbel est la loi sur  $\mathbb{R}$  de densité  $x \mapsto e^{-x-e^{-x}}$ .

1. Vérifier que c'est bien une densité et calculer la fonction de répartition associée.
2. Soient  $(X_n)$  des variables i.i.d de loi  $\mathcal{E}(1)$ . On pose  $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ . Montrer que  $(M_n - \log(n))_n$  converge en loi vers la loi de Gumbel.

**Exercice 31.** Soient  $(X_n)$  des variables aléatoires indépendantes telles que  $X_n \sim \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$ , avec  $m_n \in \mathbb{R}$  et  $\sigma_n > 0$  pour tout  $n$ . On suppose qu'il existe un réel  $m$  tel que  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n m_k = m + o(1/\sqrt{n})$  et que  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$  converge vers un réel strictement positif  $\sigma^2 > 0$ .

1. Montrer que  $\sqrt{n} \frac{(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - m)}{\sigma}$  converge en loi vers une loi normale centrée réduite.

2. Les suites  $(m_n)$  et  $(\sigma_n)$  ont-elles besoin de converger pour obtenir le résultat de la question précédente ?

**Exercice 32.** L'objectif de l'exercice est de montrer la loi des grands nombres dans sa forme suivante :

**Théorème 1.** Soient  $(X_n)_n$  des variables indépendantes et de même loi, avec  $\mathbb{E}(|X_1|) < +\infty$ . Alors

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{ps} \mathbb{E}(X_1).$$

On se donne donc une telle suite  $(X_n)_n$  de variables aléatoires, définies sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un même espace de probabilité.

1. Expliquer pourquoi il suffit de montrer que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \leq \mathbb{E}(X_1).$$

Dans la suite, on fixe  $\varepsilon > 0$  et  $Y_n := X_n - \mathbb{E}(X_1) - \varepsilon$ , et on veut donc montrer que presque sûrement :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \leq 0.$$

On introduit alors deux suites

$$G_n := \max \left( Y_0, Y_0 + Y_1, \dots, \sum_{i=0}^{n-1} Y_i \right), H_n := \max \left( Y_1, Y_1 + Y_2, \dots, \sum_{i=1}^n Y_i \right)$$

2. Montrer que ces deux suites définissent des variables aléatoires presque sûrement croissantes, et que l'on a  $G_{n+1} = Y_0 + \max(0, H_n)$  pour tout  $n$ , et donc  $G_{n+1} - H_n = Y_0 - \min(0, H_n)$ .

Soit  $A = \{\sup_n G_n = +\infty\}$ .

3. Montrer que  $A$  est un événement, égal à  $\{\sup_n H_n = +\infty\}$ .
4. Montrer que  $(G_{n+1} - H_n)\mathbf{1}_A$  converge presque sûrement vers  $Y_0\mathbf{1}_A$ .
5. Montrer que  $A$  est indépendant de  $Y_0$ .
6. Dédire des deux questions précédentes que  $\mathbb{E}((G_{n+1} - H_n)\mathbf{1}_A) \rightarrow \mathbb{E}(Y_0)\mathbb{P}(A)$ .
7. Montrer que les couples  $(G_n, \mathbf{1}_A)$  et  $(H_n, \mathbf{1}_A)$  ont même loi, et en déduire que  $\mathbb{E}((G_{n+1} - H_n)\mathbf{1}_A) \geq 0$ .
8. En déduire que  $\mathbb{P}(A) = 0$ , puis que  $\frac{G_n}{n}$  tend presque sûrement vers 0 et conclure.

**Exercice 33.** Soient  $(X_n)$  des variables indépendantes centrées et dans  $L^2$ . On note  $\sigma_k^2 = \text{Var}(X_k)$ , et on pose  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ . Soit, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $M_n = \max_{1 \leq k \leq n} |S_k|$ . Soit  $\varepsilon > 0$  et  $E = \{M_n \geq \varepsilon\}$ . On suppose que  $E$  est non vide et on pose

$$E_k = \{|S_k| \geq \varepsilon\} \cap \left( \bigcap_{i=1}^{k-1} \{|S_i| < \varepsilon\} \right).$$

1. Montrer que  $\mathbb{P}(E) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(E_k)$ .
2. Montrer, pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , que  $\mathbb{E}(\mathbf{1}_{E_k} S_k^2) \geq \varepsilon^2 \mathbb{P}(E_k)$  et en déduire que

$$\mathbb{P}(E) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\mathbf{1}_{E_k} S_k^2).$$

3. En développant le carré, montrer que  $\mathbb{E}(\mathbf{1}_{E_k} S_n^2) \geq \mathbb{E}(\mathbf{1}_{E_k} S_k^2)$  pour  $1 \leq k \leq n$ .
4. Montrer que  $\mathbb{P}(E) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}(\mathbf{1}_E S_n^2)$  et en déduire l'inégalité dite *maximale* suivante :

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2.$$

**Exercice 34.** Soient  $(X_n)$  des variables indépendantes centrées et dans  $L^2$ . On note  $\sigma_k^2 = \text{Var}(X_k)$ , et on pose  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ . On suppose que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \sigma_i^2$  converge.

1. On pose  $A_m$  la variable aléatoire  $\sum_{k \in \mathbb{N}} |S_{m+k} - S_m|$  ainsi que  $A = \inf_m A_m$ . À quoi correspond l'événement  $A = 0$  par rapport à la suite  $(X_n)$  ?
2. En utilisant le résultat de l'exercice précédent, montrer que pour  $\varepsilon > 0$  :

$$\mathbb{P}(A_m > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{j=m+1}^{+\infty} \sigma_j^2.$$

3. En déduire que pour  $\varepsilon > 0$ ,  $\mathbb{P}(A > \varepsilon) = 0$ , puis que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} X_n$  converge presque sûrement.