LEÇON 106 : Groupe Linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous groupes de $GL(E)$. Applications

Dans ce plan on notera K un corps et E un K-espace vectoriel de dimension finie n

1 Groupe linéaire et groupe spécial linéaire

Définition 1 : On appelle groupe linéaire de E et on note $GL(E)$ l'ensemble des automorphisme de E. $(GL(E), \circ)$ est un groupe.

Définition 2 : On note $GL_n(K)$ le groupe des matrices inversibles de taille n.

Proposition 3 : Si $n = \dim E$ $GL_n(K)$ et $GL(E)$ sont isomorphes. L'isomorphisme est fixé par le choix d'une base de E.

Remarque 4. Cet isomorphisme permet l'utilisation des outils du calcul matriciel pour l'étude de $GL(E)$.

Proposition 5 : Un élément f de $L(E)$ est élément de $GL(E)$ ssi f injective
ssi f surjective
ssi $\det(f) \neq 0$
ssi f envoie une base de E sur une base de E.

Remarque 6 : Cette caractérisation est fausse en dimension infinie : - Pour $E = \mathbb{R}[X]$ $f : P \mapsto XP$ est injective mais pas surjective.
$f : P \mapsto P'$ est surjective mais pas injective.

Proposition 7 : Le determinant est un morphisme de $GL_n(K)$ dans les inversibles de K.

Définition 8 : On appelle groupe special linéaire le noyau de l'application déterminant. On note $SL_n(K) = \{ M \in GL_n(K) \mid \det(M) = 1 \}$.

Définition 9 : On note $SL(E) = \{ u \in GL(E) \mid \det(u) = 1 \}$ car le déterminant ne dépend pas de la base choisie.

1.2 Générateurs

Proposition 10 : Soit H un hyperplan de E et $u \in GL(E)$ tel que $u_{|H} = id_H$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
- $\det u = \lambda \neq 1$
- u admet une valeur propre $\lambda \neq 1$ et u est diagonalisable
- $\mathrm{Im}(u - Id) \not\subset H$
- Il existe une base B de E telle que $\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \neq 1$

Définition 11 . Les éléments de $GL(E)$ qui vérifient la proposition sont appelés dilatation d'hyperplan H, de rapport λ et de droite $D = \mathrm{Im}(u - Id)$.
Si $\lambda = -1$ il s'agit d'une réflexion.

Exemple 12 : $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$, $X^k \mapsto \begin{cases} X^k & \text{si } k \neq 1 \\ 2X & \text{si } k = 1 \end{cases}$ est une dilatation.

Proposition 13 Soit H hyperplan de E tel que $H = \ker f$, $f \in E^*$. Soit $u \in GL(E)$, $u \neq I_d$ et $u_{|H} = Id_{|H}$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :
- $\det(u) = 1$
- u n'est pas diagonalisable.
- $\mathrm{Im}(u - Id) \subset H$
- Il existe $a \in H$, $a \neq 0$ tel que $u = x \mapsto x + f(x) \cdot a$
- Il existe une base B de E telle que
$$\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 14 : Les éléments de $GL(E)$ qui vérifient la proposition 13 sont appelés transvection d'hyperplan H et de droite $D = \mathrm{Im}(u - Id)$. De plus $D = \mathrm{Vect}(a)$ et $D \subset H$.

Remarque 15 : Toute transvection peut s'écrire dans une bonne base $I_n + \lambda E_{ij}$, $\lambda \neq 0$.

(DEV1)
Proposition 16 : $SL(E)$ est engendré par les transvections
Proposition 17 : $GL(E)$ est engendré par les transvections et les dilatations

Exemple 18 : Cf annexe 1

Application 19 Algorithme du pivot de Gauss pour le calcul de solutions de $AX = B$ ou le calcul de dimension de sous espaces

Application 20 Le centre de $GL_n(K)$ est $\{\lambda I_n, \lambda \in K^*\}$
Le centre de $SL_n(K)$ est $\{\lambda I_n, \lambda \in K$ et $\lambda^n = 1\}$

1.3 Topologie

Ici $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La topologie est celle de la norme euclidienne

Proposition 21 : $GL(E)$ est un ouvert dense de $L(E)$.

Application 22 : Le polynôme caractéristique de AB est égal à celui de BA pour $A, B \in M_n(K)$.

Proposition 23 : Si $K = \mathbb{C}$, $GL(E)$ est connexe par arcs
$SL(E)$ est connexe par arcs (DEV1)

Remarque 24 : Si $K = \mathbb{R}$ $GL(E)$ n'est pas connexe.

2. D'autres sous-groupes de GL(E).

2.1 sous groupes finis

Définition 25 : Soit σ une permutation de $\mathfrak{S}_n$. Une matrice de permutation est une matrice de coefficient $(m_{ij}) = (\delta_{i\,\sigma(j)}) = M_\sigma$

Exemple 26 : figure 2 annexe.

Proposition 27 : L'application $\begin{cases} \mathfrak{S}_n \longrightarrow GL_n(K) \\ \sigma \longmapsto M_\sigma \end{cases}$ est un morphisme de groupe injectif.

Proposition 28 : Théorème de Cayley : Un groupe fini de cardinal n est isomorphe à un sous groupe de $\mathfrak{S}_n$

Application 30 : Tout sous groupe fini de cardinal n est isomorphe à un sous groupe de $GL_n(K)$

Proposition 31 : Le cardinal de $GL_n(F_p)$ pour p premier est $\prod_{i=0}^{n-1} (p^n - p^i) = p^{\frac{n(n-1)}{2}} m$ où $p \wedge m = 1$

Application 32 : Les matrices de $GL_n(F_p)$ de la forme $I_n + T$, où T est triangulaire supérieure stricte, forment un p-groupe de Sylow de $GL_n(F_p)$.

Application 33 : Tout groupe fini dont l'ordre est divisible par p premier a un p groupe de Sylow.

Proposition 34. Théorème de Burnside : Soit G un sous groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini, alors G est fini : DEV2

Contre exemple 35 : Pour $k = \mathbb{F}_2(X)$ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in k \right\}$ est un sous groupe infini de $GL_2(k)$ d'exposant 2.

2.2 Groupe Orthogonal

On suppose K de caractéristique différente de 2 et q une forme quadratique définie positive sur E.

Définition 36 : On appelle groupe orthogonal associé à q l'ensemble $\{u \in GL(E) \mid \forall x \in E\ q(u(x)) = q(x)\}$ des isométries notée $O(q)$

Proposition 37 : $\forall u \in O(q)$ $\det(u) = \pm 1$

Définition 38 : On appelle groupe spécial orthogonal associé à q $SO(q) = \{u \in O(q) \mid \det(u) = 1\}$.

Définition 39 On nomme symétrie orthogonale tout élément u de $O(q)$ tel que $u \neq id_E$ et $u^2 = id_E$

Proposition 40 Si u est une symétrie, il existe 2 sous espaces supplémentaires E^+ et E^- tels que $u|_{E^+} = id_{E^+}$ et $u|_{E^-} = -id_{E^-}$

Définition 41 Soit u une symétrie orthogonale. Si u fixe un hyperplan, on dit que u est une réflexion orthogonale. Si $\dim(E^-) = 2$, on dit que u est un renversement orthogonal

Théorème 42 (Cartan Dieudonné). Tout élément de $O(q)$ s'écrit comme produit de moins de n réflexions orthogonales

Corollaire 43 Si $n \geq 3$, tout élément de $SO(q)$ s'écrit comme produits d'au plus n renversements orthogonaux

2.3. Le cas particulier de $O_n(\mathbb{R})$

Dans cette partie, on suppose que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni de la norme euclidienne.

Théorème 44 Soit $u \in O_n(\mathbb{R})$. Il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & -1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & -1 & & \\ & & & & & R_{\theta_1} & \\ 0 & & & & & & \ddots \ R_{\theta_r} \end{pmatrix}$$

où $R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$

Corollaire 45 $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif

Application 46 $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs

Théorème 47 $O_n(\mathbb{R})$ est compact

Théorème 48 (décomposition polaire).

Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors $\exists!\ (O,S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tq $M = OS$

De plus, $\begin{cases} GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \\ M \longmapsto (O,S) \end{cases}$ est un homéomorphisme

Application 49 $O_n(\mathbb{R})$ est un sous groupe compact maximal de $GL_n(\mathbb{R})$

Application 50 $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes

Application 51 L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est la boule unité de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ (pour la norme subordonnée à la norme euclidienne)

Références : Szpirglas Algèbre L3

Perrin, Cours d'algèbre

Oraux X-ENS algèbre 2

Objectif agrégation

Mneimné Testard, Introduction à la théorie des groupes de Lie