Bellman-Ford

Terminaison : il n'y a que des boucles pour imbriquées

BF (G, s) :

Initialiser $d(s,0) = 0$ et $d(t,0) = +\infty$ $\forall t \neq s$

Pour $k = 1$ à $|S| - 1$

  Pour tt $t \in S$

    Pour tout $(u, t) \in A$

      $d(t,k) \leftarrow \min(d(t,k-1),\ d(u,k-1) + p(u,t))$

Pour tt $(u,v) \in A$

  Si $d(v,|S|-1) > d(u,|S|-1) + p(u,v)$

    renvoyer " ya 1 cycle de pds < 0 ... "

Renvoyer $(d(v,|S|-1))_{v \in S}$

Bellman-Ford [Cormen p 602-605]

Rappels : Entrée : $G=(S,A)$ un graphe orienté et pondéré par $p : A \longrightarrow \mathbb{Z}$

(Il peut avoir des cycles < 0) et $s \in S$ un sommet "origine"

Sortie : • "il y a un cycle de poids strictement négatif" si tel est le cas dans G accessible depuis s

• un tableau contenant les tailles de plus courts chemins dans G de s à $v \in S$ pour tout $v \in S$

Algo écrit avec programmation dynamique : voir le plan. et là →

Terminaison : Claire (pas de boucle tant que ni d'appel récursif)

Correction : • Si il existe un cycle de poids strictement négatif dans G accessible depuis s vérifions que l'algo le détecte (car renvoie "il y a un cycle de poids ... ")

Notons $C = v_0, \dots, v_k$ le cycle où $v_0 = v_k$ et $\sum_{i=0}^{k-1} p(v_i, v_{i+1}) < 0$ (*)

Supposons par l'absurde que l'algo renvoie le tableau d

Cela implique que $\forall i \in [\![0, k-1]\!]$, $d(v_{i+1}, |S|-1) \leq d(v_i, |S|-1) + p(v_i, v_{i+1})$

Sommons les inégalités : $\underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} d(v_{i+1}, |S|-1)}_{} \leq \sum_{i=0}^{k-1} d(v_i, |S|-1) + \sum_{i=0}^{k-1} p(v_i, v_{i+1})$

$$= \sum_{i=1}^{k} d(v_i, |S|-1)$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} d(v_i, |S|-1) \quad \text{car } v_0 = v_k$$

On simplifie alors par $\sum_{i=0}^{k-1} d(v_i, |S|-1)$ (et on peut car cette somme est $< \infty$ car tous les v_i sont accessibles depuis s puisque C l'est)

et on obtient $\sum_{r=0}^{k-1} p(v_i, v_{i+1}) \geqslant 0$ d'où contradiction avec (*)

• Si il n'y a pas de cycle de poids strictement négatif accessible depuis s alors

$\forall v \in S$, $\delta(s,v)$ = distance minimale de s à t est bien définie

Montrons que dans ce cas, l'algo renvoie le tableau d et que ce tableau contient effectivement tous les $\delta(s,v)$, $v \in S$.

On note pour $k \in [\![0, |S|-1]\!]$ et $t \in S$ $d_k(v,k)$ = valeur de $d(v,k)$ à la fin de la boucle "pour tout $(u,t) \in A$" (ligne 5)

↳ Montrons par récurrence sur $k \in [\![0, |S|-1]\!]$ que $\forall v \in S$,

$d_f(v,k)$ = longueur d'un plus court chemin entre s et v

empruntant au plus k arcs $:= \ell(v,k)$

Vrai pour $k=0$

Supposons l'hypothèse vraie pour $k-1$. Soit $v \in S$

Alors soit $\ell(v,k)$ est atteinte pour un chemin ayant au plus $k-1$ arcs,

auquel cas $\ell(v,k) = \ell(v,k-1) = d_f(v,k-1)$;

soit $\ell(v,k)$ est atteinte pour un chemin ayant k arcs ; chemin qu'on

peut décomposer en $s \xrightarrow{*} u \to v$

chemin de longueur $k-1$

Dans ce cas, $\ell(v,k) = \min_{(u,v)\in A} \left(p(u,v) + \underbrace{\ell(v,k-1)}_{= d_f(v,k-1)} \right)$

On en déduit que $\ell(v,k) = \min \left(d_f(v,k-1), \min_{(u,v)\in A} (p(u,v) + d_f(v,k-1)) \right)$

$= d_f(v,k)$ par définition de l'algo.

↳ On en déduit que $\forall v \in S$, $d_f(v, |S|-1) = \delta(s,v)$

En effet, si v n'est pas accessible depuis s, $\delta(s,v) = \infty$

et $d_f(v, |S|-1) = \ell(v, |S|-1) = \infty$ aussi

Sinon, il existe un plus court chemin de s à v, C [illegible]

Or, un plus court chemin de s à v ne peut contenir de cycle < 0

par hypothèse, ni de cycle > 0 par définition de plus court chemin et on peut

supprimer tous les cycles de poids nul. Donc on peut supposer que C est acyclique.

Il contient alors au plus $|S|$ sommets soit au plus $|S|-1$ arcs

on en déduit que $\ell(v, |S|-1) = \delta(s,v)$

Comme $d_f(v, |S|-1) = \ell(v, |S|-1)$, cela conclut

↳ Reste à montrer que l'algo renvoie effectivement d_f.

$\forall (u,v) \in A$, $d_f(v, |S|-1) = \delta(s,v)$ par le point précédent

$\overset{(*)}{\leq} \delta(s,u) + p(u,v)$

$= d_f(u, |S|-1) + p(u,v)$

(*) est vrai car $A = \{$ chemins de s à v tels que la dernière arête empruntée est $(u,v)\}$

$$C \{\text{chemins de } s \text{ à } v\} = B$$

donc $\min_{C \in B} p(C) \leq \min_{C \in A} p(C)$

$\delta(s,v)$ " $\min_{C \in \{\text{chemins de } s \text{ à } u\}} p(C) + p(u,v)$

" $\delta(s,u) + p(u,v)$

Donc aucun des tests de la ligne 8 ne force Bellman-Ford à renvoyer "il y a un cycle ..." .

Complexité spatiale : $\textcircled{H}(|S|^2)$, temporelle $\textcircled{H}(|S|^2|A|)$

Améliorations • Les boucles 4 et 5 combinées ne font que partitionner A :

$$A = \bigsqcup_{t \in S} \left(\bigsqcup_{\substack{u \in S \\ (u,t) \in A}} (u,t) \right)$$

On peut donc remplacer les lignes 4 et 5 par la ligne suivante :

"pour tout $(u,t) \in A$"

On obtient alors une complexité temporelle en $\textcircled{H}(|S||A|)$

• De plus, on ne se sert que du tableau $(d(v,k-1))_{v \in S}$ pour calculer $(d(v,k))_{v \in S}$ donc on peut se limiter à deux tableaux de taille $|S|$ en mémoire (1 pour les k pairs, 1 pour les k impairs) d'où une complexité spatiale en $\textcircled{H}(|S|)$