Équation de Bessel [Oraux XENS analyse 4 p 101]

(Th) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin(\theta))\, d\theta$

(rq) Le résultat un peu tiré par les cheveux a en fait 2 qualités :

→ Il permet de montrer comment utiliser les DSE pour résoudre 1 équa diff

→ Il permet de calculer les $\int$ de Wallis paires (rq : $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(\theta)\, d\theta$

démo • On considère (E) : $xy'' + y' + xy = 0$

Par CL linéaire, l'ensemble des solutions sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ est 1 ev de dim 2

• $g : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\sin(\theta) x)\, d\theta$ est solution de (E)

$(x, \theta) \mapsto \cos(x \sin(\theta))$ est C^∞ et ses dérivées $\underset{/x}{}$ sont $\overset{\pm \cos/\sin\ (x\sin(\theta))\ \sin^n(\theta)}{\text{(des polynômes en cos et sin)}}$

donc sont bornées indépendamment de x et de θ $\underset{\text{par 1}}{}$ donc $\int$ par rapport à θ sur le compact $[0, \pi]$

Le th de dérivation sous $\int$ s'applique et

$\forall x \in \mathbb{R}, \ g'(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x\sin(\theta)) \sin(\theta)\, d\theta$ et $g''(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x\sin(\theta)) \sin^2(\theta)\, d\theta$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \ xg''(x) + g'(x) + xg(x)$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Big[-\sin(x\sin(\theta))\sin(\theta) \underbrace{- x\cos(x\sin(\theta))\sin^2(\theta) + x\cos(x\sin(\theta))}_{= x\cos(x\sin(\theta))\cos^2(\theta)} \Big] d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi} \Big[\sin(x\sin(\theta)) \cos(\theta) \Big]_0^{\pi} = 0$$

Donc g est solution de (E)

• On cherche les fonctions DSE de (E) (analyse - synthèse)

Soit f DSE au voisinage de 0 et solution de (E). $\exists R > 0$ et $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq $\forall x \in]-R, R[, f(x) = \sum a_n x^n$

Alors $\forall x \in]-R, R[, \ f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) x^n$

et $xf''(x) = x \left(\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}(n+1) n x^n$

Donc $\forall x \in]-R, R[, \ xf''(x) + f'(x) + xf(x)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}(n+1) n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1) x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n$$

$$= a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_{n+1}(n+1)^2 + a_{n-1} \right] x^n$$

Par ! du DSE, $a_1 = 0$ et $\forall n \geq 1, \ a_{n+1}(n+1)^2 + a_{n-1} = 0$

càd $\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}} = \frac{-1}{(n+1)^2}$ (licite)

On en déduit /rec sur n que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2n+1} = 0$ et

d'autre part que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = \frac{a_{2n}}{a_{2n-2}} \times \frac{a_{2n-2}}{a_{2n-4}} \times \dots \times \frac{a_4}{a_2} \times \frac{a_2}{a_0} a_0$

$$= \frac{-1}{(2n)^2} \times \frac{-1}{(2n-2)^2} \times \dots \times \frac{-1}{2} a_0$$

$$= \frac{(-1)^n a_0}{4^n (n!)^2}$$

Donc $\forall x \in]-R, R[$, $f(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$

Réciproquement, le rayon de cv de cette série est ∞ car $\left| \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{4^{n+1} (n+1)!^2} \frac{4^n (n!)^2}{(-1)^n x^{2n}} \right| = \frac{x^2}{4(n+1)^2} \xrightarrow[\infty]{} 0$

et elle est bien solution de (E)

De plus, comme $f(0) = a_0$, $\exists !$ fonction DSE solution de (E) et tq $f(0) = 1$;

à savoir $f_0 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n} \end{cases}$

- Soit f solution de (E) sur $]0, a[$. Montrons que (f, f_0) est libre $\Leftrightarrow$ f pas bornée au vois de 0

($\Leftarrow$) Par contraposée : si (f, f_0) est liée, comme f_0 est C^0 en 0 donc bornée autour de 0, il en va de même pour f

($\Rightarrow$) Si (f, f_0) est libre, c'est une base de l'ev des solut° sur $]0, a[$

Si on note $W = \begin{vmatrix} f & f_0 \\ f' & f_0' \end{vmatrix}$ le wronskien de (f, f_0), on a :

$\forall x \in]0, a[$, $W(x) \overset{(*)}{=} f(x) f_0'(x) - f'(x) f_0(x)$ donc

$$W'(x) = \cancel{f' f_0'} + f f_0'' - f'' f_0 - \cancel{f' f_0'}$$

$$= f \left(-\frac{f_0'}{x} - f_0 \right) - \left(-\frac{f'}{x} - f \right) f_0 \quad \text{car } f \text{ et } f_0 \text{ sont solut° de (E)}$$

$$= -\frac{W(x)}{x} \quad \text{après simplification.}$$

Donc $\forall x \in]0, a[$, $W(x) = C e^{-\ln(x)} = \frac{C}{x}$ avec $C \neq 0$ car (f, f_0) est libre

/abs, f est borné au vois de 0. Comme $\lim_0 f_0 = 1$ et $\lim_0 f_0' = 0$, on a grâce à $(*)$ + l'expression de W : $-\frac{C}{x} \underset{0}{\sim} f'(x)$. Or, si $b \in]0, a[$, $x \mapsto -\frac{C}{x}$ garde 1 signe constant et on peut prendre b tq f' soit de signe constant sur $]0, b]$ et est pas $\int$

donc par $\int$ des relations de comparaison, $\int_b^x f'(t)\,dt \underset{x \to 0}{\sim} \int_b^x -\frac{C}{t}\,dt = -C(\ln(x) - \ln(b))$

Donc $f(x) - f(b) \underset{x \to 0}{\sim} C(\ln(b) - \ln(x))$ cad $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} -C\ln(x)$ donc f pas bornée autour de 0 $\Rightarrow$ X

• Conclusion : g est C^0 donc bornée en 0 donc g et f sont liées sur $]0,+\infty[$

donc sur $\mathbb{R}^+$ par continuité de ces 2 fonctions : $f = \lambda g$

De plus, $f(0) = 1 = g(0)$ donc $\lambda = 1$. Donc $f_0|_{\mathbb{R}^+} = g|_{\mathbb{R}^+}$

Enfin, f et g sont paires toutes les deux donc aussi égales sur $\mathbb{R}^-$

Donc $f_0 = g$

(19) Pour K les $\int$ de Wallis, on a

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin(\theta))\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\sin^{2n}(\theta)\right)d\theta \quad \text{en DSE cos}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^{2n}(\theta)\,d\theta\right)x^{2n} \quad (\text{cvn sur 1 compact})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2}x^{2n} \quad \text{par th.}$$

On identifie les coeff $\Longrightarrow \forall n \geq 0,\ \int_0^{\pi}\sin^{2n}(\theta)\,d\theta = \frac{\pi\,(2n)!}{4^n(n!)^2} = \frac{\pi}{4^n}\binom{2n}{n}$

Or, $\int_0^{\pi}\sin^{2n}(\theta)\,d\theta = 2\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}(\theta)\,d\theta = 2W_{2n}$

Donc $\forall n \geq 0,\ W_{2n} = \frac{\pi}{2}\times\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$