Dual de $M_n(K)$ [oraux X-ENS alg 1 p329]

- **Th** : $\varphi : \begin{cases} M_n(K) \longrightarrow M_n(K)^* \\ A \longmapsto \varphi_A : \begin{cases} M_n(K) \longrightarrow K \\ M \longmapsto tr(AM) \end{cases} \end{cases}$ est 1 isomorphisme

démo φ est linéaire par linéarité de tr et $\dim M_n(K) = \dim M_n(K)^*$

on montre donc l'injectivité : Soit $A \in Ker(\varphi)$

Alors $\forall M \in M_n(K)$, $tr(AM) = 0$.

C'est en particulier le cas pour $M = E_{ij}$ $\forall i,j \in [\![1,n]\!]$

Or, $tr(AE_{ij}) = a_{ji}$ donc $A = 0$

car AE_{ij} = mat nulle sauf à la colonne j où y a la colonne i de A

- **cor 1** : Les formes lin centrales sont les formes lin proportionnelles à tr :

Soit $g \in M_n(K)^*$.

$(\forall X, Y \in M_n(K), g(XY) = g(YX)) \iff (\exists \lambda \in K, \forall X \in M_n(K), g(X) = \lambda tr(X))$

démo $\Leftarrow$ clair car $tr(AB) = tr(BA)$ (K avec produit matriciel)

$\Rightarrow$ / Th, $\exists A \in M_n(K)$, $g(X) = tr(AX)$.

Il reste à mq $A = \lambda I_n$ pour $\lambda \in K$

Or, $tr(AXY) = tr(AYX)$ /hp

et $tr(AYX) = tr(XAY)$ car tr est centrale donc

$\forall X, Y \in M_n(K)$, $tr((AX - XA)Y) = 0$

donc $\varphi_{AX-XA} = 0$ donc $AX - XA = 0$ car φ = iso

Donc A commute avec tout $M_n(K)$: c'est donc bien 1 homothétie et ok

lemme : Si M commute avec tout $M_n(K)$, c'est 1 homothétie

(on le démo c des endos) : / abs, u pas homothétie et commute c $\forall$ $\mathcal{L}(E)$

$\Downarrow$

$\exists x \neq 0$ tq x et $u(x)$ pas liés $\Rightarrow$

on peut compléter $(x, u(x))$ en 1 base B

Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice ds B est $\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & u(x) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$

Alors $u(v(x)) = u(x) \neq v(u(x)) = x + u(x)$ sinon $x = 0 \Rightarrow$ ↯

- **cor 2** Si $n \geqslant 2$, tout hyperplan de $M_n(K)$ rencontre $GL_n(K)$

démo Soit H hyp : c'est le noyau d'1 forme lin $\varphi \neq 0$

$/ \text{th}, \exists A \in M_n(K), \ \varphi = tr(A \cdot)$

on cherche $X \in GL_n$ tq $\varphi(X) = tr(AX) = 0$

or, si $r = rg(A) > 0$, $\exists P, Q \in GL_n$, $A = PJ_rQ$

donc $\forall X$, $tr(AX) = tr(PJ_rQX) = tr(J_rQXP)$

donc il suffit de trouver $Y \in GL_n(K)$ tq $tr(J_rY) = 0$ et alors $X = Q^{-1}YP^{-1}$ conviendra

$Y = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$ convient car

J_rY est de diagonale nulle