

# Décomposition Dunford [Gouldson alg p 194, 195]

Th

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  de pol car  $\chi_u$  scindé. Alors  $\exists!$   $(d, m) \in \mathcal{L}(E)$  tq  
 $d$  diagonalisable,  $m$  nilpotent,  $u = d + m$ , et  $d$  et  $m \in K[u]$  ( $\Rightarrow d$  et  $m$  commutent)

Lemme. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $P \in \mathcal{I}_u$  tq  $P = \lambda \prod_{i=1}^n M_i^{d_i}$  (décomp en irred)

Notons  $\forall i \in \{1, n\}$   $N_i = \text{Ker } M_i^{d_i}(u)$ . Alors  $E = \bigoplus_{i=1}^n N_i$  et

$\forall i \in \{1, n\}$ , la projection sur  $N_i // \lambda' \bigoplus_{j \neq i} N_j$  est un polynôme en  $u$ .

démo / TDDN,  $E = \bigoplus_{i=1}^n N_i$

Notons  $Q_i = \prod_{j \neq i} M_j^{d_j}$ . Les  $Q_i$  sont s'écrit entre eux dans un ensemble de

/ Bézout,  $\exists (U_i)_i \in K[x]$  tq  $\sum_{i=1}^n Q_i U_i = 1 \quad (*)$

Notons  $P_i = Q_i U_i$  et  $p_i = P_i(u)$ .  $(*) \Rightarrow \sum_{i=1}^n p_i = \text{id}_E$

donc  $\forall i \in \{1, n\} \quad \sum_{j=1}^n p_j \circ p_i = p_i \quad (**)$

or,  $\forall i \neq j$ ,  $p_j \circ p_i = U_j U_i(u) \circ \underbrace{Q_i Q_j(u)}_{=0} = 0$  car  $P \mid Q_i Q_j$

Donc  $(**)$  se simplifie en  $p_i^2 = p_i$  donc  $p_i = \text{projecteur}$

Calculons son noyau et son image.

$\rightarrow \text{Im}(p_i) = N_i$  par double inclusion:

$$\begin{aligned} \text{si } x \in \text{Im}(p_i), \quad x &= p_i(y) \quad \text{donc} \quad M_i^{d_i}(u)(x) = M_i^{d_i}(u)(p_i(y)) \\ &= M_i^{d_i} Q_i U_i(u)(y) \\ &= 0 \quad \text{car } P \mid M_i^{d_i} Q_i \end{aligned}$$

Donc  $x \in \text{Ker } M_i^{d_i}(u) = N_i$

si  $x \in N_i$ , par  $(*)$ ,  $x = \sum_{j=1}^n p_j(x) = p_i(x)$  car  $\forall j \neq i$ ,  $M_i^{d_i} \mid Q_j$

donc  $x \in \text{Im } p_i$

$\rightarrow \text{Ker}(p_i) = \bigoplus_{j \neq i} N_j$  par double inclusion.

si  $x \in \text{Ker}(p_i)$ , comme  $x = \sum_{j=1}^n p_j(x) = \sum_{j \neq i} p_j(x) \in \bigoplus_{j \neq i} \text{Im}(p_j) = \bigoplus_{j \neq i} N_j$

$\forall j \neq i$   $N_j \subset \text{Ker}(p_i)$  car  $M_j^{d_j} \mid Q_i \mid P_i$  donc  $\bigoplus_{j \neq i} N_j \subset \text{Ker}(p_i)$

Conclusion: le projecteur sur  $N_i // \lambda' \bigoplus_{j \neq i} N_j$  est  $p_i = P_i(u) \in K[u]$

demo 18 (3)  $\chi_u = (-1)^m \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)^{d_i}$  est scindé.

on lui applique le lemme et on continue de noter  $p_i = \text{proj sur } N_i \parallel \bigoplus_{j \neq i} N_j$

on pose  $d = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i$  qui est diagonalisable et  $\in K[u]$

(car les  $p_i$  sont diag et commutent et sont codiag

de  $\exists B$  base tq  $\text{Mat}_B(d) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ )

et  $m = u - d \in K[u]$

$m$  est nilp et on aura même l'existence de la décomposition de Dunford :

$$m = u - d = \sum_{i=1}^n (u - \lambda_i \text{id}_E) \circ p_i \quad (\text{car } \sum p_i = \text{id}_E)$$

$$\text{puis /car } \forall k \geq 1, m^k = \sum_{i=1}^n (u - \lambda_i \text{id}_E)^k \circ p_i \quad (\text{car commute } + p_i \circ p_j = \delta_{ij} p_i)$$

$$\text{Pour } k = \max_{i=1}^n d_i, \text{ on a } \forall i \in \{1, n\}, (u - \lambda_i \text{id}_E)^k \circ p_i = 0$$

$$\text{car } p \mid (x - \lambda_i)^k p_i$$

$$\text{donc } m^k = 0$$

(!) Si  $d'$  et  $m'$  vérifient tout  $d' \in K[u]$  et  $d \in K[u]$  donc  $d$  et  $d'$  commutent et or diag  $\Rightarrow$  ils sont codiag  $\Rightarrow d - d'$  diag

De même,  $m, m' \in K[u] \Rightarrow m, m'$  commutent  $\Rightarrow m' - m$  nilpotente par binôme

Newton. Or,  $u = d + m = d' + m' \Rightarrow d - d' = m' - m$  donc

$d - d'$  est diag et nilp donc nulle donc  $d = d'$  puis  $m = m'$