ELLIPSOÏDE DE JOHN-LOEWNER [XENS alg 3 p 229]

Th Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ tel que $0 \in \mathring{K}$

Alors il existe un unique ellipsoïde contenant K, centré en 0 et de volume minimal

(que l'on munit ici de la norme euclidienne)

démo • Un ellipsoïde est un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ de la forme

$$E_S = \{ X \in \mathbb{R}^n \mid {}^tXSX \leq 1 \} \text{ où } S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$$

• Pour tout $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, notons V_S le volume de E_S

Comme S est symétrique réelle, on peut la diagonaliser en base orthonormée donc supposer que $S = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ où $a_i > 0$

On en déduit que
$$V_S = \int \cdots \int_{\sum_{i=1}^n a_i x_i^2 \leq 1} dx_1 \ldots dx_n$$
$$= \int \cdots \int_{\sum_{i=1}^n t_i^2 \leq 1} \frac{dt_1 \ldots dt_n}{\sqrt{a_1 \ldots a_n}}$$
via le changement de variable $x_i = \frac{t_i}{\sqrt{a_i}}$
$$= \frac{1}{\sqrt{\det(S)}} V_{I_n}$$

• On peut donc reformuler le problème ainsi :

On cherche à minimiser
$$D \left\{ \begin{array}{ccc} S_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ S & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{\det(S)}} \end{array} \right.$$

sur l'ensemble $A = \{ S \in S_n^{++}(\mathbb{R}),\ K \subset E_S \}$.

• Remarquons que $0 \in \mathring{K}$. Il existe donc $r > 0$ tel que $B(0,r) \subset K$. Comme $B(0,r) = E_{\frac{I_n}{r^2}}$, si $S \in A$

on a $E_{\frac{I_n}{r^2}} \subset K \subset E_S$ donc $V_{\frac{I_n}{r^2}} \leq V_S$ donc $D\left(\frac{I_n}{r^2}\right) \leq D(S)$

On en déduit que pour minimiser D sur A, il suffit de minimiser D sur $C = \{ S \in S_n^{++}(\mathbb{R}),\ K \subset E_S \text{ et } D(S) \geq D\left(\frac{I_n}{r^2}\right) \}$

- Montrons que D est continue sur le compact non vide C.

 On en déduira que D atteint son minimum sur C d'où l'existence d'un ellipsoïde de volume minimal contenant K

 - C est fermé car si $(S_n)_n \in C^{\mathbb{N}}$ converge vers S alors $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ d'une part. D'autre part, en passant à la limite dans $\forall n \in \mathbb{N}\ D(S_n) \geq D\left(\frac{I_n}{r^2}\right)$ on a $D(S) \geq D\left(\frac{I_n}{r^2}\right) > 0$ donc $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

 Enfin, en passant à la limite dans $\forall X \in K,\ \forall n \in \mathbb{N},\ {}^tXS_nX \leq 1$ on obtient que $\forall X \in K,\ {}^tXSX \leq 1$ donc $K \subset E_S$. Finalement, $K \subset E_S$

 - C est borné. En effet, soit $S \in C$ et $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|X\| \leq 1$

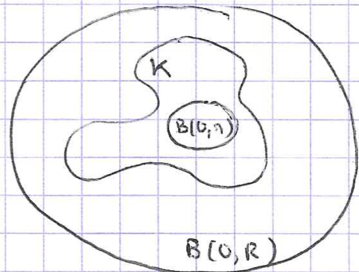
 Comme $rX \in B(0,r) \subset K \subset E_S$,

 $${}^t(rX)\,S(rX) = r^2\, {}^tXSX \leq 1 \quad \text{donc}$$

 $$|||S||| = \sup_{\|X\|\leq 1} {}^tXSX \leq \frac{1}{r^2}$$

 - $C \neq \emptyset$. En effet, K est compact donc $\exists R>0,\ K \subset B(0,R) = E_{\frac{I_n}{R^2}}$

 Donc $\frac{I_n}{R^2} \in C$



 - det et $\sqrt{\ }$ sont continues et $\sqrt{\det(S)}$ ne s'annule pas pour $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

 d'où la continuité de D sur C

- Montrons maintenant que D est strictement convexe sur le convexe C

 Cela assurera que le minimum trouvé au point précédent est unique

 - C est convexe : Soit $S, R \in C$ et $t \in [0,1]$

 $tS + (1-t)R \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ par convexité de ce dernier

 De plus, $\forall X \in K$, $${}^tX(tS + (1-t)R)X = t\,\underbrace{{}^tXSX}_{\leq 1} + (1-t)\underbrace{{}^tXRX}_{\leq 1} \leq 1$$

 Donc $K \subset E_{tS+(1-t)R}$

 Enfin, $B(0,r) \subset K \subset E_{tS+(1-t)R}$ donc $D(tS + (1-t)R) \geq D\left(\frac{I_n}{r^2}\right)$

- D est strictement convexe sur C (et sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$ aussi d'ailleurs)

Soit $S \neq R \in C$ et $t \in]0,1[$

Par le théorème de pseudo réduction simultanée, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq

$$S = {}^tP \begin{pmatrix} s_1 & & \\ & \ddots & \\ & & s_n \end{pmatrix} P \quad \text{où } s_i > 0 \quad \text{et } R = {}^tPP$$

rq. Comme $S \neq R$, l'un des s_i est différent de 1. $(*)$

on a donc
$$D(tS + (1-t)R) = \det\left({}^tP \begin{pmatrix} ts_1 + 1-t & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & ts_n + 1-t \end{pmatrix} P \right)^{-1/2}$$
$$= \det(P)^{-1} \prod_{i=1}^{n} \underbrace{(ts_i + 1-t)^{-1/2}}_{= e^{-\frac{1}{2}\ln(ts_i + 1-t)}}$$

Par stricte concavité de $\ln$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$,

$$\ln(ts_i + 1-t) \geq t\ln(s_i) + (1-t)\ln(1)$$

et l'une de ces inégalités est stricte par $(*)$

Donc
$$D(tS + (1-t)R) < \det(P)^{-1} \prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{1}{2}(t\ln(s_i) + (1-t)\ln(1))}$$
$$= \det(P)^{-1} e^{-\frac{1}{2}(t\ln(\prod_{i=1}^{n} s_i) + (1-t)\ln(1))}$$
$$\leq \det(P)^{-1} \left(t\, e^{-\frac{1}{2}\ln(\prod s_i)} + (1-t)\, e^{-\frac{1}{2}\ln(1)} \right)$$
par convexité de $t \mapsto e^{-t/2}$ sur $\mathbb{R}$
$$= \det(P)^{-1} \left(t \left(\prod_{i=1}^{n} s_i\right)^{-1/2} + (1-t) \right)$$
$$= t\, D(S) + (1-t)\, D(R)$$

D'où le résultat annoncé