

Lemme de Morse [Rouvière p 354 & p 203]

Lemme de Morse Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^3 où l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ contenant 0

On suppose que $df(0) = 0$ et que $d^2f(0)$ est non dégénéré de signature $(p, m-p)$

Alors $\exists$ 1 C^1 -difféomorphisme φ entre 2 voisinages de 0 de $\mathbb{R}^n$ tq $\varphi(0) = 0$

et tq au ce voisinage, $f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_m^2$

(on a $\varphi(x_1, \dots, x_n) = (u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_m(x_1, \dots, x_n))$)

Lemme Soit $A_0 \in S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$ et $\varphi: \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n(\mathbb{R}) \\ H \mapsto {}^t H A_0 H \end{cases}$

Alors $\exists$ V voisinage de A_0 de $S_n(\mathbb{R})$ et $\psi: V \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ de classe C^1 tq

$$\forall A \in V, A = {}^t \psi(A) A_0 \psi(A)$$

cad: une forme quad A suffisamment proche d'une forme quad non dégénérée (A_0) qui est équivalente = il y a même par agmt de base.

démo lemme • φ est polynomiale donc C^∞

$$\begin{aligned} \text{De plus } \varphi(I_n + H) &= A_0 + {}^t H A_0 + A_0 H + {}^t H A_0 H \\ &= \varphi(I_n) + {}^t H A_0 + A_0 H + O(\|H\|^2) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } D\varphi(I_n): \begin{cases} H \mapsto {}^t H A_0 + A_0 H \\ M_n(\mathbb{R}) \mapsto M_n(\mathbb{R}) \end{cases} = {}^t (A_0 H) + A_0 H$$

• On a $\text{Im}(D\varphi(I_n)) \subset S_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \text{D'autre part } \text{Ker}(D\varphi(I_n)) &= \{H \in M_n(\mathbb{R}) \mid A_0 H \in A_n(\mathbb{R})\} \\ &\cong A_n(\mathbb{R}) \quad \text{car } A_0 \text{ est inversible.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \dim \text{Ker}(D\varphi(I_n)) &= \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{puis /th ng } \dim(\text{Im}(D\varphi(I_n))) = \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \dim S_n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \text{Im}(D\varphi(I_n)) = S_n(\mathbb{R})$$

• Notons $F = \{H \in M_n(\mathbb{R}) \mid A_0 H \in S_n(\mathbb{R})\}$. $I_n \in F$

$$\text{De plus } F \oplus \text{Ker}(D\varphi(I_n)) = M_n(\mathbb{R}) \quad \text{car } M_n(\mathbb{R}) = A_n(\mathbb{R}) \oplus S_n(\mathbb{R})$$

avec cette fonction d'embê ?

• Soit $\psi: F \rightarrow S_n(\mathbb{R})$ la restriction de φ à F (on restreint pour que $D\varphi(I_n)$ soit h_0)

Alors $D\varphi(I_n): F \rightarrow S_n(\mathbb{R})$ est bijective par ce qui précède

On peut donc appliquer le th d'inversion locale: $\exists$ 1 voisinage $U \ni I_n$ dans F

(qu'on peut supposer $\subset GL_n(\mathbb{R})$ car on prend $U \cap GL_n(\mathbb{R})$ qui reste ouvert

car $GL_m(\mathbb{R})$ l'est) tq ϕ est $\pm C^1$ difféo de U au V .

$$0: U \rightarrow \begin{matrix} V \\ \cup \\ A_0 \end{matrix}$$

et Δ voisinage V de $\phi(I_m) = A_0$ dans $S_n(\mathbb{R})$

Alors, $\forall A \in V$, $A = {}^t \phi'(A) A_0 \phi'(A)$ et ϕ^{-1} est effectivement C^1 au V

démo du lemme de Morse

on écrit la FTRI au voisinage de 0 pour g :

$$\begin{aligned} g(x) - g(0) &= \underbrace{Dg(0)(x)}_{=0} + \int_0^1 (1-t) D^2g(tx)(x, x) dt \\ &= {}^t x Q(x) x \quad \text{avec } Q(x) = \int_0^1 (1-t) D^2g(tx) dt \end{aligned}$$

(fonction C^1 de x)
(car $g \in C^3 + C^0$ au 0)

Comme $Q(0) = \frac{1}{2} D^2g(0) \in S_m(\mathbb{R}) \cap GL_m(\mathbb{R})$ (Hp),

le lemme assure que pour x dans Δ voisinage suffisamment petit de 0,

$$Q(x) = {}^t M(x) Q(0) M(x) \quad \text{où } M: V \rightarrow GL_m(\mathbb{R}) \text{ est de classe } C^1$$

$$\text{on en déduit que } g(x) - g(0) = {}^t (M(x)x) Q(0) (M(x)x)$$

Or $Q(0) = \frac{1}{2} D^2g(0)$ est de signature $(p, m-p)$: dc $\exists A \in GL_m(\mathbb{R})$ tq

$${}^t A Q(0) A = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_{m-p} \end{pmatrix} \quad \text{dans cette nouvelle base, le vecteur}$$

$M(x)x$ a pour coordonnées $u(x)$

et / formule chgmt base $M(x)x = Au(x)$

$$\text{Donc } g(x) - g(0) = {}^t u(x) {}^t A Q(0) A u(x) = u_1(x)^2 + \dots + u_p(x)^2 - u_{p+1}(x)^2 - \dots - u_m(x)^2$$

De plus $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\begin{cases} x \mapsto (u_1(x), \dots, u_m(x)) = A^{-1} M(x)x \end{cases} \text{ est de classe } C^1 \text{ (car c'est le cas de } M),$$

$\varphi(0) = 0$ et $D\varphi(0) = A^{-1} M(0)$ est inversible donc

par th d'inversion locale, φ est $\pm C^1$ difféo de $\tilde{V}$ voisinage de 0 inclus ds V dans W voisinage de $\varphi(0) = 0$.

de OK