

Méthode de Newton [Pauvrière p 152]

• Th : Soit $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 tq $c < d$, $f(c) < 0 < f(d)$

et $(f' > 0 \text{ sur } [c, d])$ Alors

$f'(a) > 0$ suffit
 $\rightarrow f$ admet $\exists !$ zéro $a \in]c, d[$

$\rightarrow$ Notons $F: x \in [c, d] \rightarrow x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. $\exists \alpha > 0$ tq $I = [a - \alpha, a + \alpha]$

est stable par F et la suite $x_0 \in I$, $x_{n+1} = F(x_n)$

converge vers a à vitesse quadratique (car $\exists C > 0, \forall n \geq 0, |x_{n+1} - a| \leq C |x_n - a|^2$)

$\rightarrow$ Si $f'' > 0$ sur $[c, d]$ alors $[a, d]$ stable par f et si $x_0 \in I$, $x_{n+1} = F(x_n)$,

$$x_{n+1} - a \sim \frac{1}{2} \frac{f''(a)}{f'(a)} (x_n - a)^2$$

démo $\rightarrow f$ est strictement croissante et $f(c) < 0 < f(d)$ donc par TVI

f admet $\exists !$ $0 : a \in]c, d[$

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{On constate que } F(x) - a &= x - a - \frac{f(x) - f(a)}{f'(x)} \text{ puisque } f(a) = 0 \\ &= \frac{f(a) - f(x) - (a - x)f'(x)}{f'(x)} \end{aligned}$$

Or, par Taylor - Lagrange entre a et x (ou x et a), $\exists z_x$ entre a et x tq

$$f(a) = f(x) + (a - x)f'(x) + \frac{f''(z_x)}{2} (a - x)^2$$

$$\text{Donc } F(x) - a = \frac{f''(z_x)}{f'(x)} \frac{(x - a)^2}{2} \quad (**)$$

Comme $(u, v) \mapsto \frac{f''(u)}{f'(v)}$ est continue sur le compact $[c, d]^2$,

$$\text{on peut introduire } C = \max_{u, v \in [c, d]} \frac{|f''(u)|}{2|f'(v)|}$$

$$\text{et donc } \forall x \in [c, d], |F(x) - a| \leq C |x - a|^2 \quad (*)$$

Soit dès lors $\alpha > 0$ tq $I = [a - \alpha, a + \alpha] \subset I$ et $C\alpha < 1$

Alors $\forall x \in I$, $|F(x) - a| \leq C\alpha^2 < \alpha$ donc I est stable par F .

On peut alors définir $(x_n)_n$ et cette suite vérifie par (*)

$$\forall n \geq 0, |x_{n+1} - a| \leq C |x_n - a|^2$$

$$\text{Donc / réc } C |x_{n+1} - a| \leq (C |x_0 - a|)^{2^n} \leq (C\alpha)^{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ car } C\alpha < 1$$

→ Si $f'' > 0$, montrons que $[a, d]$ est stable par F

Comme $f'' > 0$, f' $\nearrow$ donc $f' \geq 0$ sur $[a, d]$. De plus $f' > 0$

Donc $\forall x \in [a, d], F(x) = x - \underbrace{\frac{f(x)}{f'(x)}}_{\geq 0} \leq x \leq d.$

D'autre part, $\forall x \in [a, d], F(x) - a = \frac{f''(2x)}{f'(x)} \frac{(x-a)^2}{2} \geq 0$ donc $F(x) \geq a$

On peut appliquer notre résultat : $x_n \rightarrow a$

et passer à la limite de $(**)$ donne $x_{n+1} - a \sim \frac{f''(a)}{2f'(a)} (x_n - a)^2$

(optimalité de $\leq$)

Géométriquement : $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Leftrightarrow f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n) = 0$

$\Rightarrow x_{n+1}$ est l'intersection de $x = 0$ avec la tangente à f en x_n .