$A_{n \geq 5}$ est simple [~ ULM p53]

- Lemme 1 : A_n est engendré par les 3-cycles
- Lemme 2 : Pour $n \geq 5$, les 3-cycles sont conjugués ds A_n.

démo : Soit (i_1, i_2, i_3) et (j_1, j_2, j_3) 2 3-cycles

On sait qu'ils sont conjugués ds S_n : $\exists \sigma \in S_n$ tq

$$\sigma (i_1\ i_2\ i_3) \sigma^{-1} = (j_1\ j_2\ j_3)$$

Si $\sigma \in A_n$, OK

Sinon, $\exists\ i_4 \neq i_5 \notin \{j_1, j_2, j_3\}$ et alors $\tilde{\sigma} = \tau \circ \sigma \in A_n$ et

$$\tilde{\sigma} (i_1\ i_2\ i_3) \tilde{\sigma}^{-1} = (j_1\ j_2\ j_3)$$

- cor 1 : Si $n \geq 5$ et $H \triangleleft A_n$ tq H contient 1 3 cycle alors $H = A_n$

démo Si H contient 1 3-cycle, / lemme 2 + fait que H est distingué,

H contient tous les 3 cycles donc par lemme 1, $A_n \subset H \Rightarrow H = A_n$.

- Th $\forall n \geq 5$, A_n est simple (ses seuls sgps distingués st $\{id\}$ et A_n)

démo Soit $H \triangleleft A_n$ tq $H \neq \{id\}$. Montrons que $H = A_n$

Par cor 1, il suffit de mq H contient 1 3-cycle

on note $r = \min \{ \#\text{ support de } \sigma \mid \sigma \in H \setminus \{id\} \}$ et on mq $r = 3$

(rq $r > 2$ car 1 transposito $\notin A_n$)

$\rightarrow$ mq $r \leq 5$. Soit $\sigma \neq id \in H$. Alors $\exists\ a \in [\![1, n]\!]$, $\sigma(a) = b \neq a$

Notons $s = (a, b, c)$ avec $c \notin \{a, b, \sigma(b)\}$ ($s \in A_n$)

$$\text{Soit } \tau = \underbrace{s \circ \sigma \circ s^{-1}}_{\in H \text{ car } H \triangleleft A_n} \circ \underbrace{\sigma^{-1}}_{\in H} \in H \qquad (s^{-1} = (b\ a\ c))$$

On a de plus $\tau = (a\ b\ c) \circ (\sigma(b)\ \sigma(a)\ \sigma(c)) = (a\ b\ c) \circ (\sigma(b)\ b\ \sigma(c))$

Donc $\text{supp}(\tau) \subset \{a, b, c, \sigma(b), \sigma(c)\}$

Enfin, $\tau \neq id$ car $\tau(\sigma(b)) = c \neq \sigma(b)$. Donc $r \leq 5$

$\rightarrow$ /abs, $r = 5$. Alors $\exists\, \sigma \in H$ de support $= 5$ et c'est forcément 1 5-cycle

car la seule autre possibilité, c'est que c'est (3 cycle) $\circ$ transposit° $\notin A_n$

Donc $\sigma = (i_1\ i_2\ i_3\ i_4\ i_5)$

$$\text{Alors } \tau = \underbrace{\sigma}_{\in H} \circ \underbrace{\overbrace{(i_2\ i_5)(i_1\ i_4)}^{=\tilde{\sigma}} \circ \sigma^{-1} \circ (i_2\ i_5)(i_1\ i_4)}_{\in H \text{ car } H \triangleleft A_n} \in H$$

$$\text{et } \tau = \sigma \circ (\tilde{\sigma}(i_5),\ \tilde{\sigma}(i_4),\ \tilde{\sigma}(i_3)\ \tilde{\sigma}(i_2)\ \tilde{\sigma}(i_1))$$

$$= (i_1\ i_2\ i_3\ i_4\ i_5) \circ (i_2\ i_1\ i_3\ i_5\ i_4) = (i_1\ i_4\ i_3) \implies \text{X de la def de } r$$

$\rightarrow$ /abs $r = 4$. Alors $\exists\, \sigma \in H$ de # support $= 4$. C'est 1 produit de

2 transpo à supports disjoints car les 4 cycles $\notin A_n$.

Donc $\sigma = (i_1\ i_2)(i_3\ i_4)$. Soit $i_5 \notin \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ et $(i_4\ i_5\ i_3) = \tilde{\sigma} \in A_n$

Alors $\tau = \sigma \circ \tilde{\sigma} \circ \sigma^{-1} \circ \tilde{\sigma}^{-1} \in H$ (comme avant)

et $\tau = (i_1\ i_2)(i_3\ i_4) \circ (i_1\ i_2)(i_4\ i_5) = (i_3\ i_4\ i_5) \implies$ X de la def de r

$\rightarrow$ on a donc $2 < r < 4$ donc $r = 3$ et ça conclut.

ref : Algèbre pour la L3. Bayer, Risler.