Surjectivité de exp [Zavidovique : 1 max de maths p 49 pb 9 II]

__Th__ $\exp : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective

⚠ mettre des N pour M_N et GL_N car n utilisé ds les limites

__rq__ $\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ est bien déf car cette série est normalement cv

__Lemme__ Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Alors $\exp(A) \in \mathbb{C}[A]$

__démo lemme__ On a $\exp(A) = \lim_{n \to +\infty} P_n(A)$ où $P_n(A) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \in \mathbb{C}[A]$

Comme $\mathbb{C}[A]$ est un sous espace vectoriel de dimension finie de $M_n(\mathbb{C})$, il est fermé donc $\lim_{n \to +\infty} P_n(A) \in \mathbb{C}[A]$ ce qui conclut

__démo th__ • Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrons que $\exists P \in \mathbb{C}[X]$ tq que $A = \exp(P(A))$ $(*)$

Cela permet de conclure puisqu'alors $P(A)$ est un antécédent de A par exp.

Le lemme 1 montre que exp induit une application de $\mathbb{C}[A]$ dans $\mathbb{C}[A]^\times$ qu'on continue de nommer exp. De plus, comme $\mathbb{C}[A]$ est commutatif et que $e^{A+B} = e^A e^B$ si A et B commute, cette application est même 1 morphisme de groupes (de $(\mathbb{C}[A], +)$ dans $(\mathbb{C}[A]^\times, \times)$)

• Montrons que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert fermé du connexe $\mathbb{C}[A]^\times$.

Cela montrera $(*)$

On a $\exp(0+H) = \exp(0) + H + \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{H^k}{k!}}_{= o(\|H\|)}$ donc $D\exp(0) : H \longrightarrow H = id$ qui est inversible.

à justifier / mettre ds le plan si besoin

Comme exp est de classe C^1 sur $\mathbb{C}[A]$, par th d'inversion locale, $\exists$ voisinage $U \ni 0$ dans $\mathbb{C}[A]$ et voisinage $V \ni \exp(0) = I_n$ dans $\mathbb{C}[A]^\times$ tq exp est 1 C^1 difféomorphisme de U ds V

Q° : peut-on mettre 1 ouvert contenant 0 ds $\mathbb{C}[A]$? oui : comme $A \neq 0$, si $\varepsilon > 0$, $\frac{\varepsilon A}{\|A\|} \in \mathbb{C}[A]$ et est ε-proche de 0

démo du caractère ouvert

$\longrightarrow$ Mq $\exp(\mathbb{C}[A])$ est ouvert ds $\mathbb{C}[A]^\times$

Soit $M \in \exp(\mathbb{C}[A])$. $I_n \in V$ donc $M \in MV \subset \exp(\mathbb{C}[A])$

à cause de $\supset$ + morphisme — démo / double $\subset$

De plus MV est ouvert car c'est $f^{-1}(V = \text{ouvert})$ où $f : N \in \mathbb{C}[A] \mapsto M^{-1}N$

Donc MV est 1 voisinage ouvert de M dans $\exp(\mathbb{C}[A])$ ce qui conclut

$\rightarrow$ $\exp(\mathbb{C}[A])$ est fermé dans $\mathbb{C}[A]^\times$

Si $M \in \mathbb{C}[A]^\times \cap \exp(\mathbb{C}[A])^c$ alors $MV \subset \exp(\mathbb{C}[A])^c$

donc $\underset{= \mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A])}{\exp(\mathbb{C}[A])^c} = \underbrace{\bigcup_{M \in \exp(\mathbb{C}[A])^c} MV}_{\text{union d'ouverts}}$ = ouvert donc $\exp(\mathbb{C}[A])$ est fermé

par double $\subset$: $\subset$ OK

$\supset$: si $M \in \mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$ et $N = e^{P(A)} \in V$

alors $MN \in \mathbb{C}[A]^\times$ et $\notin \exp(\mathbb{C}[A])$

sinon $M = (MN)N^{-1} = e^{Q(A)} e^{-P(A)} \in \exp(\mathbb{C}[A])$

$\rightarrow$ $\mathbb{C}[A]^\times$ est connexe par arcs

Soit $M, N \in \mathbb{C}[A]^\times$. $P = \det(XM + (1-X)N) \in \mathbb{C}[X]$ admet 1 nombre fini de zéros $Z(P)$

On en déduit que $\mathbb{C} \setminus Z(P)$ est connexe par arcs. De plus 0 et $1 \in \mathbb{C} \setminus Z(P)$

puisque M et N sont inversible. Donc $\exists\, \gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} \setminus Z(P)$ un chemin

continu reliant 0 à 1.

On a donc
$$\tilde{\gamma} : \begin{cases} [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}[A]^\times \\ t \longmapsto \gamma(t)M + (1-\gamma(t))N \end{cases}$$
qui relie M et N

Rq (corollaire si encore du temps) : $\exp(M_n(\mathbb{R})) = \{ M^2 \mid M \in GL_n(\mathbb{R}) \} \neq GL_n(\mathbb{R})$

démo $\subset$ $\forall M \in M_n(\mathbb{R})$, $\exp(M) = \exp\left(\frac{M}{2} + \frac{M}{2}\right) = \left(\exp\left(\frac{M}{2}\right)\right)^2$

$\supset$ Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$ et montrons que $M^2 \in \exp(M_n(\mathbb{R}))$

On sait par le th qu'$\exists\, P \in \mathbb{C}[X]$ tq $M = \exp(P(M))$.

Or, $\underset{M \in GL_n(\mathbb{R})}{M \overset{\uparrow}{=} \overline{M}} = \overline{\exp(P(M))} = \exp(\overline{P(M)}) = \exp(\overline{P}(M))$

continuité de la conjugaison.

Donc $M^2 = e^{P(M)} e^{\overline{P}(M)} = e^{\underset{\in \mathbb{R}[X]}{(P+\overline{P})}(M)} \in \exp(M_n(\mathbb{R}))$. Donc OK

Lemme utile : $\mathbb{C}[A]^\times = GL_N(\mathbb{C}) \cap \mathbb{C}[A]$

/def $\quad \| \quad$ $\{ B \in \mathbb{C}[A] \mid \exists\, C \in \mathbb{C}[A],\ BC = CB = I_N \}$

démo $\subset$ claire.

$\supset$ Si $B \in \mathbb{C}[A] \cap GL_N(\mathbb{C})$

$\exists\, C \in GL_N(\mathbb{C})$ tq $BC = CB = I_N$. Montrons que $C \in \mathbb{C}[A]$: ça conclut.

Or, $0 = \chi_B(B) = \det(B) I_N + b_1 B + \dots + b_{n-1} B^{n-1} + (-1)^n B^n$

donc en multipliant par $C = B^{-1}$, $0 = \underset{\neq 0}{\det(B)}\, C + \underbrace{b_1 + \dots + (-1)^n B^{n-1}}_{= P(B)}$

donc $C = \dfrac{P(B)}{\det(B)} \in \mathbb{C}[A]$ car c'est le cas de B