TCL [Zuily - Queffélec p 540]

- **Th** Soit $(X_n)_n$ 1 suite de va iid $\in L^2$. On note $m = E[X_1]$ et $\sigma^2 = Var(X_1) \overset{hp}{>} 0$

$\forall n \geq 1$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$

Alors $\dfrac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1)$

démo : Quitte à remplacer X_n par $Y_n = \dfrac{X_n - m}{\sigma}$, spdg $E[X_1] = 0$ et $\sigma^2 = 1$

Pour mq $\dfrac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$ il suffit de mq $\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}$ cvs vers la fonction caract d'1 va suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$

Comme $X_1 \in L^2$, φ_{X_1} est C^2 et $\varphi_{X_1}(0) = 1$, $\varphi_{X_1}'(0) = iE[X] = 0$

et $\varphi_{X_1}''(0) = i^2 E[X^2] = -1$

Donc $\varphi_{X_1}(u) = 1 - \dfrac{u^2}{2} + \underset{u\to0}{o}(u^2)$ (*)

D'autre part $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = E\left[e^{\frac{it}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} X_k}\right]$

$= \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$

En utilisant (*) avec $\dfrac{t}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a

$$\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{\varepsilon(n)}{n}\right)^n \quad \text{avec} \quad \varepsilon(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On conclut c le lemme : Soit $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tq $z_n \to z$.

Alors $\left(1 + \dfrac{z_n}{n}\right)^n \longrightarrow e^z$

On l'utilise avec $z_n = -t^2/2 + \varepsilon(n) \longrightarrow -\dfrac{t^2}{2}$ et donc $\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) \longrightarrow e^{-t^2/2}$

$= \varphi_X(t)$

où $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ ce qui conclut

démo lemme

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $e^{z_n} - \left(1 + \dfrac{z_n}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,n} z_n^k$ en DSE e^{z_n} et binôme

Newton sur l'autre terme : $a_{k,n} = \begin{cases} \dfrac{1}{k!} - \dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} & \text{si } k \leq n \\ \dfrac{1}{k!} & \text{si } k > n \end{cases}$

Dc $\forall k, n$, $a_{k,n} \geq 0$

Dc $\left|e^{z_n} - \left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} |z_n|^k = e^{|z_n|} - \left(1+\frac{|z_n|}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

car cette fois $|z_n| \in \mathbb{R}$

Donc $\left|e^{z_n} - \left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n\right| \leq \underbrace{|e^{z} - e^{z_n}|}_{\substack{\to 0 \\ \text{par } C^0 \text{ exp}}} + \underbrace{\left|e^{z_n} - \left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n\right|}_{\xrightarrow[n]{} 0}$ vu ce qu'on viens de faire

Ce lemme est 1 peu bête, mieux vaut K φ_X où $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

<u>lemme</u> Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Alors $\varphi_X : t \mapsto e^{-t^2/2}$

<u>démo</u> : $\varphi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-x^2/2} dx$

On note $G : z \in \mathbb{C} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{e^{zx} e^{-x^2/2}}_{= f(z,x)} dx$. G est holomorphe sur $\mathbb{C}$

En effet soit $R>0$ et mq G est holo sur $D(0,R)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(\cdot, x)$ est holo sur $D(0,R)$

$\forall z \in D(0,R)$, $f(z,\cdot)$ est mesurable et $\int$ et

$|f(z,x)| \leq e^{Rx} e^{-x^2/2} \in L^1$ donc majorat° unif.

Or, pour $u \in \mathbb{R}$, $G(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ux} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{u^2}{2}} e^{-\frac{(x-u)^2}{2}} dx = e^{u^2/2} \times 1$ ∫ de Gauss $= \sqrt{2\pi}$

comme G et $z \mapsto e^{z^2/2}$ coïncident sur $\mathbb{R}$ et st holo sur $\mathbb{C}$,

elles coïncident sur $\mathbb{C}$ / zéros isolés.

Dc $\varphi_X(t) = G(it) = e^{-t^2/2}$