Analyse du tri rapide [Cormen p 166-170 (cours) + p 158-161 (correction)]

(algo) tri_rapide (A, p, r) = si $p < r$

- $q =$ partition (A, p, r)
- tri_rapide $(A, p, q-1)$
- tri_rapide $(A, q+1, r)$

(rq : on ne renvoie pas le tableau trié : on le modifie en place)

prend en entrée 1 tableau A et deux entiers p et r tq p, r sont des indices du tableau A et renvoie le tableau A ds lequel $A[p..r]$ est trié.

Pour trier totalement A, on l'appelle sur A, 1, longueur de A (numérotat° à 1)

partition_r (p, r) =

- $i =$ random $[\![p, r]\!]$, échanger $A[i]$ et $A[r]$ (permet de prendre $A[\text{random}(p, r)]$ comme pivot)
- $x = A[r]$ (* x = pivot)
- $i = p-1$ → indice max des élé $\leq x$.
- pour $j = p$ à $r-1$ faire
  - si $A[j] \leq x$
    - $i = i+1$
    - échanger $A[i]$ et $A[j]$
- permuter $A[i+1]$ et $A[r]$ et renvoyer $i+1$ → permet de mettre le pivot au milieu

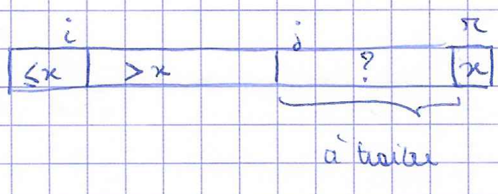
prend en entrée un tableau A et p, r deux indices de A et renvoie $q \in [\![p, r]\!]$ et modifie A de telle sorte que $A[p \ldots q]$ contient les élé $\leq$ à la valeur initiale de $A[r]$ et $A[q+1, \ldots r]$ contient les élé $>$ à cette valeur

(Th) Correction de l'algo de tri ~~fusion~~ rapide.

démo Elle dépend de celle de partition.

Montrons l'invariant suivant : "au début de chaque itération de la boucle "pour",

(1) $p \leq k \leq i \Rightarrow A[k] \leq x$; (2) $i+1 \leq k \leq j-1 \Rightarrow A[k] > x$ et (3) $k = r \Rightarrow A[k] = x$



• Avant la 1ère itération, $i = p-1$ et $j = p$ donc (1) et (2) (les prop portent sur $\emptyset$)

et l'affectation $A[r] = x$ assure (3)

• Hérédité : on a 2 cas :

$$\begin{array}{ccccc} & i & j & & r \\ \hline \le x & > x & \boxed{> x} & & x \end{array}$$

on a juste augmenté j de 1 et tt OK

$$\begin{array}{ccccc} & & j & & r \\ \hline \le x & > x & \boxed{\le x} & & x \end{array}$$

alors i augmente de 1.

(1) OK car on a échangé $A[i]$ et $A[j]$, (2) et (3) aussi

• À la fin, $j = r$ donc $A[p..i]$ contient les élé $\le x$, $A[i+1, r-1]$ contient les $> x$ et $A[r] = x$. En échangeant $A[i+1]$ et $A[r]$, on s'assure que partition(A,p,r) est l'entier q tq $A[p...q-1]$ contient les élé $\le x$, $A[q] = x$ et $A[q+1, r]$ contient les $> x$ $\Longrightarrow$ partition correct.

Donc tri_fusion est correct par rec sur taille des tableaux : ok pr $[1]$ et tri_fusion(A,p,r)

$$= \underbrace{\text{tri\_fusion}(A,p,q-1)}_{\text{trié et } \le x \text{ par hp}} \; @ \; x \; @ \; \underbrace{\text{tri\_fusion}(A,q+1,r)}_{\text{trié et } > x} \Longrightarrow \text{est trié.}$$

(Th) La complexité au pire cas de tri fusion (RANDOMISÉ) est en $\Theta(n^2)$ où n = taille tableau.

démo • Cpxté partition = $r-p-1$ comparaison = Θ(taille du tableau)

• Si chaque partition donne 1 tableau $\emptyset$ et 1 tableau de taille $n-1$,

$$C_{pire}(n) = C_{pire}(n-1) + \Theta(n) \leftarrow \text{pour partition}$$

donc $C_{pire}(n) = \Omega(n^2)$

• De plus $C_{pire}(n) = \max\limits_{0 \le q \le n-1} \left(C_{pire}(q) + C_{pire}(n-q-1) \right) + f(n)$ où $\exists M > 0$ $\left| \frac{f(n)}{n} \right| \le M$

on montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $C_{pire}(n) \le Mn^2$.

OK pr $C_{pire}(1)$. De plus / HR, $T(n) \le M \max\limits_{0 \le q \le n-1} \underbrace{\left(q^2 + (n-q-1)^2 \right)}_{\text{pol en } q \text{ max en } 0} + f(n)$

$$\le M(n-1)^2 + f(n)$$

$$= Mn^2 \underbrace{- M(2n-1)}_{\le -Mn} + \underbrace{f(n)}_{\le Mn} \le Mn^2$$

Donc $C_{pire}(n) = O(n^2)$

Finalement, $C_{pire}(n) = \Theta(n^2)$

Avec les notations qui suivent, X = nb comparaisons $= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} X_{ij} \le n \times n$!

(Th) On considère l'algo avec pivot randomisé (choisi uniformément)
Alors, l'espérance de la complexité qd les élé à trier sont distincts $= C_{moy}(n)$ $(*)$
est un $\Theta(n\ln(n))$

démo • rq : l'hp "les élé st 2 à 2 $\neq$" est pas contraignante car on peut construire 1 nouvel ordre $\leqslant_*$: $a_i \leqslant_* a_j \Leftrightarrow a_i < a_j$ ou ($a_i = a_j$ et $i < j$)

• On note X = va donnant le nb total de comparaisons effectuées (lors des partit°) qd on trie A de taille n. On note $a_1 \leqslant \dots \leqslant a_n$ les élé de A et $A_{ij} = \{a_i, \dots a_j\}$. Pour $i \neq j$ on note $X_{ij} = \mathbb{1}_{\{a_i \text{ et } a_j \text{ st comparés}\}}$

a_i et a_j sont comparés au + une fois car les comparaisons se font avec les pivots et une fois qu'1 pivot a été utilisé, on ne lui compare plus jamais rien : si a_i et a_j sont pas pivots, aucune comparaison, si l'1 est pivot, au + 1 comparaison

Dc $X \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}$ puis $E[X] \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} P(a_i \text{ et } a_j \text{ comparés})$

Or, a_i et a_j sont comparés $\Longleftrightarrow$ l'1 des pivots $\in A_{ij}$ et le 1er pivot choisi ds A_{ij} est a_i ou a_j

En effet ($\Leftarrow$) car les élé sont comparés au pivot et tant qu'on ne prend pas de pivot ds A_{ij}, a_i et a_j sont pas séparés

($\Rightarrow$) /abs aucun pivot ds A_{ij}. Alors ni a_i ni a_j st des pivots de y st pas comparés $\Rightarrow \chi$. Dc $\exists x \in A_{ij}$ pivot, on prend le 1er

Si $x \notin \{a_i, a_j\}$, $a_i < x < a_j$ $(*)$ dc x sépare a_i et $a_j \Rightarrow$ pas comparés $\Rightarrow \chi$

Dc $P(a_i \text{ et } a_j \text{ st comparés}) \overset{\text{car } i \neq j \text{ (dc évé disjoints)}}{=} P(a_i \text{ est le 1er pivot choisi ds } A_{ij}) + P(a_j \text{ 1er pivot ds } A_{ij})$

$= \dfrac{2}{j-i+1}$ car $\# A_{ij} = j-i+1$

Donc $E[X] \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{j-i+1} \overset{k=j-i}{=} \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-i} \frac{2}{k+1} = \sum_{i=1}^{n-1}\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k}}_{= O(\ln(n))} = O(n\ln(n))$

Comme $E[X] = \Omega(n\ln(n))$ car tri par comparaison, $E[X] = \Theta(n\ln(n))$