UNIFICATION [DNR p 248-251]

Algo d'unification

Entrée : un ensemble E d'équations (fini)

Sortie : un unificateur principal de E s'il existe, 1 échec sinon

$\sigma \leftarrow id$

tant que $E \neq \emptyset$ faire

  si $E = E' \cup \{f(u_1, \dots, u_p) \simeq g(v_1, \dots, v_q)\}$ alors

    si $f = g$ (et donc $p = q$) alors

      $E \leftarrow E' \cup \{u_1 \simeq v_1, u_2 \simeq v_2, \dots u_p \simeq v_p\}$

    sinon

      renvoyer échec 1

CAS 1

  si $E = E' \cup \{x \simeq x\}$ alors

    $E \leftarrow E'$

CAS 2

  si $E = E' \cup \{x \simeq u\}$ ou $E = E' \cup \{u \simeq x\}$ avec x variable et $u \neq x$ alors

    si $x \notin u$ alors

      $\sigma \leftarrow [x := u] \circ \sigma$

      $E \leftarrow E'[x := u]$

    sinon

      renvoyer échec 2

CAS 3

renvoyer σ

Th : Cet algorithme termine et est correct.

Notations et rappels

- Si u est un terme et σ une substitution on note $u[\sigma]$ le terme obtenu en remplaçant dans u chaque variable x par $\sigma(x)$
- On note $[x_1 := t_1, \dots, x_k := t_k]$ la substitution tq $\forall i$, $x_i[\sigma] = t_i$ et $\forall y$ variable $\neq$ d'1 x_i, $y[\sigma] = y$
- Un unificateur de $E = \{u_1 \simeq v_1, \dots u_n \simeq v_n\}$ est une substitution σ telle que $\forall i$, $u_i[\sigma] = v_i[\sigma]$. Il est dit principal si $\forall \sigma'$ unificateur de E,

$\exists\, \sigma''$ une substitution telle que $\sigma' = \sigma'' \circ \sigma$

<u>démo</u> du th

On note E_n et σ_n les valeurs de E et σ à l'entrée du n^e tour dans la boucle while en commençant la numérotation à 0

- Terminaison : on note a_n (resp b_n, resp c_n) le nombre de variables (resp de symboles de fonction, resp d'équations) dans E_n.

  On suppose qu'il n'y a pas d'échec (sinon, ça termine bien)

  Dans le cas 1, $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} < b_n$

  Dans le cas 2, $a_{n+1} \leq a_n$, $b_{n+1} = b_n$ et $c_{n+1} < c_n$

  Dans le cas 3, $a_{n+1} < a_n$.

  Donc la suite $(a_n, b_n, c_n)_n$ est strictement décroissante pour l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}^3$. Cet ordre étant bien fondé, l'algorithme termine.

- Correction :

  <u>lemme 1</u> On montre par récurrence sur n : $H_n =$ " Si E_n et σ_n sont bien définis, σ unifie $E \iff \exists\, \sigma'$ qui unifie E_n et tq $\sigma = \sigma' \circ \sigma_n$ "

  <u>démo</u> lemme 1 :

  Initialisation : $E_0 = E$ et $\sigma_0 = id$. H_0 se réécrit alors " σ unifie $E \iff \exists\, \sigma'$ qui unifie E " ce qui est clair.

  Hérédité : supposons H_n vraie et E_{n+1} et σ_{n+1} bien définis.

  3 cas se présentent selon ce qui s'est passé à l'étape n.

  Dans les 3 cas il suffit de mq $\exists\, \sigma'$ tq σ' unifie E_n et $\sigma = \sigma' \circ \sigma_n$

  $\overset{(*)}{\iff} \exists\, \sigma''$ tq σ'' unifie E_{n+1} et $\sigma = \sigma'' \circ \sigma_{n+1}$

  $\rightarrow$ Cas 1 : on a alors $\sigma_{n+1} = \sigma_n$ et $E_{n+1} = E' \cup \{u_1 \simeq v_1, \dots u_p \simeq v_p\}$

  L'implication $\Leftarrow$ de $(*)$ est claire et l'implication $\Rightarrow$ aussi puisqu'un unificateur de E_n doit unifier E' et $\{u_1 \simeq v_1, \dots, u_p \simeq v_p\}$

  $\rightarrow$ Cas 2 : on a alors $\sigma_{n+1} = \sigma_n$ et $E_{n+1} = E_n \setminus \{x \simeq x\}$ donc $(*)$ est claire

  $\rightarrow$ Cas 3 : on a alors $\sigma_{n+1} = [x := u] \circ \sigma_n$ et $E_{n+1} = E'[x := u]$

Montrons alors l'équivalence $(*)$:

$(\Leftarrow)$ $\sigma' = \sigma'' \circ [x := u]$ convient : elle unifie E_n et

$$\sigma' \circ \sigma_n = \sigma'' \circ \underbrace{[x := u] \circ \sigma_n}_{= \sigma_{n+1}} = \sigma'' \circ \sigma_{n+1} = \sigma$$

$(\Rightarrow)$ Si σ' unifie E_n alors $x[\sigma'] = u[\sigma']$ donc par lemme 2 à venir,

$\sigma' = \sigma' \circ [x := u]$. Alors $\sigma'' = \sigma'$ convient : elle unifie E_{n+1} et

$$\sigma'' \circ \sigma_{n+1} = \sigma' \circ \sigma_{n+1} = \sigma' \circ \underbrace{[x := u] \circ \sigma_n}_{\sigma_{n+1}} = \sigma' \circ \sigma_n = \sigma$$

D'où H_{n+1} dans tous les cas

<u>Lemme 2</u> Si x est une variable et u un terme (dans lequel il n'y a pas x)

et σ est une substitution, $x[\sigma] = u[\sigma] \Rightarrow \sigma = \sigma \circ [x := u]$

<u>démo lemme 2</u> : Notons $\sigma' = \sigma \circ [x := u]$. On mq σ et σ' donnent la même image

à toutes les variables. C'est le cas pour x car $x[\sigma'] = x[x := u][\sigma]$

$= u[\sigma] = x[\sigma]$

et si $y \neq x$, $y[\sigma'] = y[x := u][\sigma] = y[\sigma]$. Donc OK

<u>Conclusion</u> de la preuve de la correction : Notons n la dernière étape de l'algo

3 cas peuvent se présenter :

→ Soit $E_n = \emptyset$, auquel cas id unifie E_n donc par lemme 1, σ_n unifie E.

De plus, si σ unifie E, par lemme 1, $\exists \sigma'$ (qui unifie $\emptyset$ donc en fait

quelconque) telle que $\sigma = \sigma' \circ \sigma_n$ donc l'unificateur trouvé est principal.

→ Soit on a eu un échec de type 1 et alors E_n contient une équation

du type $f(u_1, \dots u_p) \simeq g(v_1, \dots, v_q)$ avec $g \neq f$. Donc E_n n'est pas unifiable

et par le lemme 1, E non plus.

→ Soit on a eu un échec de type 2 et alors E_n contient une équation $x \simeq u$

avec u terme $\neq x$ et $x \in u$. Alors $\forall \sigma$, $x[\sigma] \neq u[\sigma]$ car $|x[\sigma]| < |u[\sigma]|$

Donc E_n est pas unifiable et toujours par lemme 1, E non plus.

Dans tous les cas la réponse donnée par l'algo est correcte.