

Mémoire de Master 2

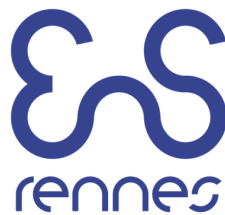
Exemples d'utilisation de techniques d'algèbre en géométrie

Leçon 191

Aurélien Canton encadré par David Bourqui



**Université
de Rennes**



école
normale
supérieure

Table des matières

1	Algèbre linéaire et géométrie	4
1.1	Distance et volume	4
1.1.1	Déterminant de Gram [4]	4
1.1.2	Déterminant et volume [3]	5
1.1.3	Étude d'une suite de polygones [2] [4]	8
1.2	Classification des isométries vectorielles [1] [7]	9
2	Utilisation des groupes	11
2.1	Action de groupes	11
2.2	Isométries affines	11
2.2.1	Premiers résultats [1]	11
2.2.2	Classification des isométries affines [1] [6] [2]	12
2.3	Isométries laissant invariant un polygone	13
2.3.1	Le groupe diédral	13
2.3.2	Isométries conservant une figure [2] [6]	14
3	La théorie des corps [5]	16

Introduction

Ce mémoire se concentre surtout autour de la notion de distance dans l'espace car elle permet de lier la géométrie à l'algèbre.

La notion de distance est l'une des notions la plus ancienne de l'histoire des mathématiques. Elle est essentielle chez l'être vivant afin de correctement se représenter l'espace. Mathématiquement, elle commença sûrement à apparaître avec Euclide dans son traité « Les Éléments », bien que non formalisée, avec par exemple sa notion de rapport.

La géométrie et l'algèbre sont très liées depuis l'apparition de coordonnées car les coordonnées permettent de traduire des propriétés géométriques (être parallèle, perpendiculaire etc...) via des équations dépendant de la base choisie. A partir de cela, la notion de distance peut être formalisée à partir de la norme associée à un produit scalaire de notre espace préhilbertien.

Cependant, étudier la géométrie d'un espace, c'est étudier ses isométries, ses transformations, et donc c'est un travail de théorie des groupes, Klein développa cet aspect en liant géométrie et groupe.

L'objectif de ce mémoire est d'étudier les espaces vectoriels et affines euclidiens, et travaillant surtout autour des isométries (affines ou vectorielles). Dans un premier temps on travaillera autour du déterminant de Gram qui permet de calculer la distance d'un élément à un sous-espace vectoriel. Après avoir vu le lien entre le déterminant et le volume dans l'espace, nous étudierons en détail l'ensemble des isométries vectorielles puis affines. Un résultat important ici sera surtout la classification de ces isométries car cela permet donc de connaître la géométrie de notre espace. Enfin, nous terminerons par une partie sur l'utilisation de la théorie des corps en géométrie via l'étude des nombres constructibles, ce qui permet de résoudre de nombreux problèmes historiques comme la duplication du cube, la quadrature du cercle...

1 Algèbre linéaire et géométrie

1.1 Distance et volume

1.1.1 Déterminant de Gram [4]

Définition 1.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien (réel ou complexe) et $x_1, \dots, x_n$ n vecteurs de E . On appelle matrice de Gram de $x_1, \dots, x_n$ la matrice $MG(e_1, \dots, e_n) = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$ et déterminant de Gram le déterminant de cette matrice, que l'on note $G(x_1, \dots, x_n)$.

Proposition 1.2. Une matrice A est hermitienne positive si et seulement si A est une matrice de Gram de n vecteurs d'un espace préhilbertien E .

Remarque 1.3. De plus, une matrice de Gram de n vecteurs $x_1, \dots, x_n$ est définie si la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre. Et le déterminant de Gram est nul si et seulement si la famille est liée.

Théorème 1.4. (DEV1) Soit E un espace préhilbertien, V un sous-espace vectoriel de E muni d'une base $(e_1, \dots, e_n)$. Soit $x \in E$. Alors :

$$d(x, V)^2 = \frac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}.$$

Démonstration. Soit V un sous-espace vectoriel de E muni d'une base $(e_1, \dots, e_n)$. Soit $x \in E$. Alors il existe $p_V(x) \in V$ tel que $\|x - p_V(x)\| = d(x, V)$.

Or $p_V(x) - x \in V^\perp$, donc par n -linéarité du déterminant :

$$\begin{aligned} G(e_1, \dots, e_n, x) &= \begin{vmatrix} & & & \langle e_1, x \rangle \\ & & & \vdots \\ & & & \langle e_n, x \rangle \\ \langle e_1, x \rangle & \dots & \langle e_n, x \rangle & \|x\|^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} & & & \langle e_1, p_V(x) \rangle \\ & & & \vdots \\ & & & \langle e_n, p_V(x) \rangle \\ \langle e_1, x \rangle & \dots & \langle e_n, x \rangle & \|p_V(x)\|^2 \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \\ \langle e_1, x \rangle & \dots & \langle e_n, x \rangle & \|x - p_V(x)\|^2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Le premier déterminant est par définition : $G(e_1, \dots, e_n, p_V(x))$, or V est un espace vectoriel de dimension n , et $p_V(x) \in V$, donc la famille $(e_1, \dots, e_n, p_V(x))$ est liée, donc le déterminant de Gram associé est nul.

Donc : $G(e_1, \dots, e_n, x) = G(e_1, \dots, e_n) \|x - p_V(x)\|^2 = G(e_1, \dots, e_n) d(x, V)^2$, d'où le résultat voulu. $\square$

Théorème 1.5. (Inégalité de Hadamard) (DEV1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $X_1, \dots, X_n$ les colonnes de M . Alors :

$$|\det(M)| \leq \|X_1\| \times \dots \times \|X_n\|,$$

avec $\|X\| = \sqrt{X^* X}$. Il y a égalité si et seulement si les $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont orthogonaux.

Démonstration. Montrons tout d'abord le résultat suivant : Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, avec $(E, \|\cdot\|, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, alors :

$$G(x_1, \dots, x_n) \leq \prod_{k=1}^n \|x_k\|^2. \quad (1.1)$$

Si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, alors le résultat est trivial car le déterminant de Gram associé est nul.

Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ et notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathcal{H}_n)$: « pour toute famille libre de n vecteurs de E , on a l'inégalité : $G(x_1, \dots, x_n) \leq \prod_{k=1}^n \|x_k\|^2$. »

Si $n = 1$, alors pour tout $x_1 \in E^*$, $G(x_1) = \|x_1\|^2$. L'inégalité est vérifiée.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $(\mathcal{H}_n)$. Soit $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in E^{n+1}$ une famille libre de vecteurs de E . On note $F = Vect(x_1, \dots, x_n)$. Alors d'après le théorème 1.4, on a :

$$G(x_1, \dots, x_{n+1}) = G(x_1, \dots, x_n) \times d(x_{n+1}, F)^2 \leq G(x_1, \dots, x_n) \|x_{n+1}\|^2.$$

Donc par hypothèse de récurrence :

$$G(x_1, \dots, x_{n+1}) \leq \prod_{k=1}^{n+1} \|x_k\|^2.$$

Donc $(\mathcal{H}_{n+1})$ est vraie. Donc par le principe de récurrence, $(\mathcal{H}_n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Et de plus, en regardant les inégalité faites, nous avons égalité si les $(x_1, \dots, x_{n+1})$ sont orthogonaux.

On considère maintenant $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $X_1, \dots, X_n$ les vecteurs colonnes de M . Alors on a : $|\det(A)|^2 = \det(A^*A)$. Or $A^*A = (\langle X_i, X_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$. Donc : $\det(A^*A) = G(X_1, \dots, X_n)$. Donc d'après l'équation (1.1), on en déduit l'inégalité voulue :

$$|\det(M)| \leq \|X_1\| \times \dots \times \|X_n\|,$$

avec égalité si et seulement si les $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont orthogonaux.

□

Exemple 1.6. Dans le plan euclidien, le parallélogramme est d'aire maximale (en fixant la longueur de ses coté) si et seulement s'il est un rectangle. De plus, dans l'espace $\mathbb{R}^3$, nous avons un résultat semblable : le parallélépipède est de volume maximal si et seulement s'il est un pavé.

1.1.2 Déterminant et volume [3]

Nous allons dans cette partie énoncer quelques propriétés sur le déterminant pour comprendre son sens géométrique afin de pouvoir en déduire des résultats important géométriquement parlant.

Théorème 1.7. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors l'aire du parallélogramme engendré par x et y est égale à la valeur absolue du déterminant de ces deux vecteurs.

Et de manière plus générale, nous avons le résultat suivant :

Théorème 1.8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $(u_1, \dots, u_n)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On note $\text{Vol}(u_1, \dots, u_n)$ le volume du polytope engendré par $(u_1, \dots, u_n)$. Alors :

$$\text{Vol}(u_1, \dots, u_n) = |\det(u_1, \dots, u_n)|.$$

Lemme 1.9. (DEV2) Soit trois points $M_i = (x_i, y_i)$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$ du plan, alors ces trois points sont alignés si et seulement si : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0$.

Démonstration. On note T le triangle de sommets M_1, M_2 et M_3 . Alors d'après le théorème 1.8, on a :

$$2\mathcal{A}_T = \det(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}).$$

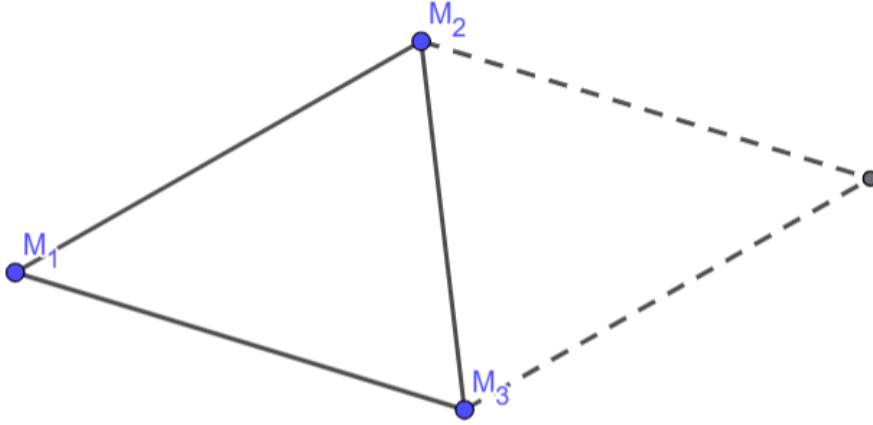


FIGURE 1 – Triangle $M_1M_2M_3$.

Donc :

$$2\mathcal{A}_T = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

D'une autre part, on a en soustrayant la première colonne à la deuxième et troisième colonne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Donc par transitivité :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 2\mathcal{A}_T.$$

Or, les points M_1, M_2 et M_3 sont alignés si et seulement si $\mathcal{A}_T = 0$ si et seulement si

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0, \text{ ce qui termine la preuve de ce lemme.} \quad \square$$

Théorème 1.10. (Pappus) (DEV2) Soient D et D' deux droites affines sécantes d'un plan vectoriel réel. Soient A, B et C trois points distincts de $D \setminus D'$ et $A', B',$ et C' trois points distincts de $D' \setminus D$ tels que :

- (i) les droites (AB') et $(A'B)$ se coupent en un point P ,
- (ii) les droites (BC') et $(B'C)$ se coupent en un point Q ,
- (iii) les droites (CA') et $(C'A)$ se coupent en un point R .

Alors les points P , Q et R sont alignés.

Démonstration. Considérons un repère $\mathcal{R} = (O, i, j)$ où O est le point d'intersection de D et D' , où i dirige D et j dirige D' . Faisons un petit dessin, nous avons le dessin suivant :

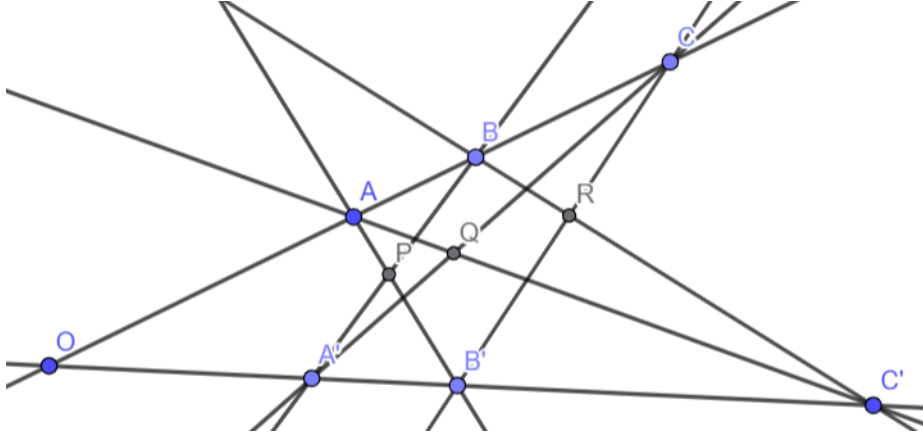


FIGURE 2 – Illustration du théorème de Pappus.

Posons $A = (a, 0)$, $B = (b, 0)$, $C = (c, 0)$ et de même $A' = (a', 0)$, $B' = (b', 0)$ et $C' = (c', 0)$ les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$. Déterminons maintenant les différentes coordonnées de P , Q et R . Alors un point $M = (x, y)$ est sur la droite (AB') si et seulement si $\det \mathcal{R}(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AM}) = 0$, ce qui équivaut à $b'x + ay = ab'$. Nous pouvons aussi utiliser ce résultat concernant la droite $(A'B)$ en échangeant les lettres a et b .

On se retrouve alors à résoudre le système suivant : $\begin{cases} b'x + ay = ab' \\ a'x + by = a'b \end{cases}$. Or $bb' \neq aa'$ car les droites (AB') et $(A'B)$ se coupe par hypothèse, donc nous trouvons les coordonnées de P :

$$P = \left(\frac{ab(b' - a')}{bb' - aa'}, \frac{a'b'(b - a)}{bb' - aa'} \right).$$

Un lecteur non attentif pourra refaire les calculs pour trouver les coordonnées de Q et R , il suffit en fait d'effectuer la permutation circulaire (a, b, c) une fois pour obtenir Q et deux fois pour obtenir R . On a donc :

$$Q = \left(\frac{bc(c' - b')}{cc' - bb'}, \frac{b'c'(c - b)}{cc' - bb'} \right) \text{ et } R = \left(\frac{ac(a' - c')}{aa' - cc'}, \frac{a'c'(a - c)}{aa' - cc'} \right).$$

Or par multilinéarité du déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{ab(b' - a')}{bb' - aa'} & \frac{bc(c' - b')}{cc' - bb'} & \frac{ac(a' - c')}{aa' - cc'} \\ \frac{a'b'(b - a)}{bb' - aa'} & \frac{b'c'(c - b)}{cc' - bb'} & \frac{a'c'(a - c)}{aa' - cc'} \end{vmatrix} = \frac{1}{(bb' - aa')(cc' - bb')(aa' - cc')} \times \Delta,$$

$$\text{avec } \Delta = \begin{vmatrix} bb' - aa' & cc' - bb' & aa' - cc' \\ ab(b' - a') & bc(c' - b') & ac(a' - c') \\ a'b'(b - a) & b'c'(c - b) & a'c'(a - c) \end{vmatrix}.$$

Or on remarque que l'on a $cc'C_1 + aa'C_2 + bb'C_3 = 0$, où C_1 , C_2 et C_3 sont les trois colonnes de la matrice. Donc $\Delta = 0$. Donc d'après le lemme 1.9, P , Q et R sont alignés, ce qui termine la preuve du théorème de Pappus. $\square$

Remarque 1.11. En gardant les mêmes notations, on suppose maintenant que (AB') est parallèle à $(A'B)$ et que (BC') est parallèle à $(B'C)$, alors (AC') est parallèle à $(A'C)$.

En effet, voici la figure dans ce cas :

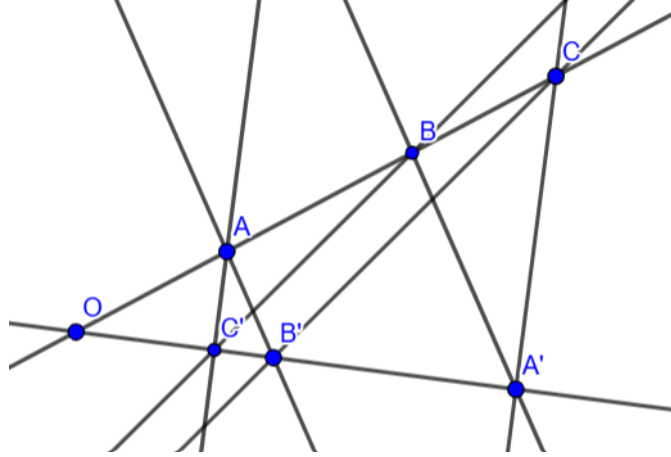


FIGURE 3 – Illustration du théorème de Pappus dans le cas parallèle.

En gardant les mêmes notations, la condition de parallélisme entre (AB') et $(A'B)$ est $aa' = bb'$ (c'est lorsque P n'est pas définie). De même, on a $bb' = cc'$. Donc par transitivité, $aa' = cc'$, d'où le parallélisme entre la droite (AC') et $(A'C)$.

En fait, cette distinction de cas s'explique par le fait que le théorème de Pappus 1.10 est un résultat de géométrie projective, donc le cas où les trois droites sont parallèles est en fait celui où elles se croisent à l'infini et donc les points sont encore alignés.

1.1.3 Étude d'une suite de polygones [2] [4]

Proposition 1.12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_i)_{i \in [1,n]} \in \mathbb{C}^n$, alors :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} P(\omega^j),$$

$$\text{avec } \omega = e^{\frac{2i\pi}{n}} \text{ et } P(X) = \sum_{k=1}^n a_k X^{k-1}.$$

Application 1.13. Soit $Z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, on définit alors une suite $(Z^{(k)})$ de polygones par :
$$\begin{cases} Z^{(0)} &= Z \\ Z^{(k+1)} &= \begin{pmatrix} z_j^{(k+1)} \end{pmatrix}, \text{ avec } z_j^{(k+1)} = \frac{z_j^{(k)} + z_{j+1}^{(k)}}{2} \text{ (où } z_{n+1}^{(k)} = z_1^{(k)}). \end{cases}$$

Alors la suite $(Z^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ de polygones converge vers l'isobarycentre de $z_1, \dots, z_n$.

Voici une figure pour une suite de polygones :

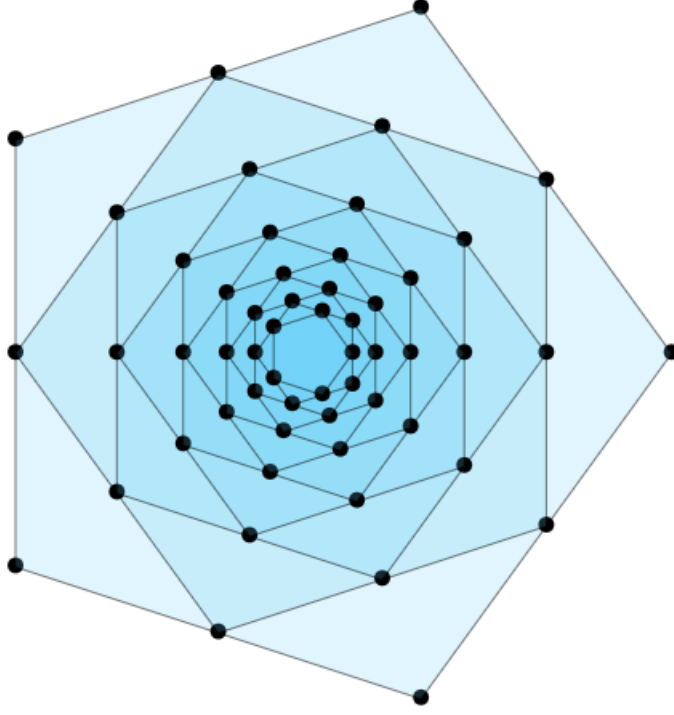


FIGURE 4 – Illustration d'une suite de polygones.

1.2 Classification des isométries vectorielles [1] [7]

Dans la suite, si ce n'est pas précisé autre chose, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|)$ désigne un espace vectoriel euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{E}$ désigne un espace affine de direction E .

Définition 1.14. Une isométrie vectorielle est une application linéaire qui conserve la norme. On note $O(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E dans E , avec E un espace vectoriel normé.

Définition 1.15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle groupe orthogonal, noté $O_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $A^T A = I_n$.

Proposition 1.16. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $O(\mathbb{R}^n) \cong O_n(\mathbb{R})$.

Une matrice orthogonale représente en fait une isométrie vectorielle dans une base orthonormée de notre espace euclidien.

Remarque 1.17. Si E est un espace vectoriel de dimension n , en considérant une base orthonormée de E , on a : $O(E) \cong O_n(\mathbb{R})$.

Définition 1.18. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $SO_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $A \in O_n(\mathbb{R})$ de déterminant 1. On l'appelle le groupe spécial orthogonal.

Théorème 1.19. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$Z(O_n(\mathbb{R})) = \{\pm I_n\} \text{ et si } n \geq 3, Z(SO_n(\mathbb{R})) = \{\pm I_n\} \cap SO_n(\mathbb{R}).$$

Proposition 1.20. Le groupe orthogonal est engendré par les réflexions et $SO_n(\mathbb{R})$ est engendré par les renversements.

Remarque 1.21. Nous pouvons même affiner ce résultat : tout élément du groupe orthogonal $O(E)$ peut s'écrire comme produit d'au plus n réflexions. Et si $n \geq 3$, tout élément du groupe spécial orthogonal peut s'écrire comme produit d'au plus n renversements.

Ce résultat forme le théorème de Cartan-Dieudonné.

Théorème 1.22. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors :

$$A \in O_2(\mathbb{R}) \iff \exists! \theta \in [0, 2\pi[, \exists! \varepsilon \in \{\pm 1\}, A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\varepsilon \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \varepsilon \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Avec ε caractérisé par le déterminant de A .

Application 1.23. Si A est une matrice orthogonale de $O_2(\mathbb{R})$, alors d'après le théorème de classification 1.22, la matrice A est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\varepsilon \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \varepsilon \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

avec $\theta \in [0, 2\pi[$ et $\varepsilon = \pm 1$.

Nous avons les cas suivants :

- (i) Si $\varepsilon = 1$, alors A est la matrice d'une isométrie vectorielle directe du plan qui est une rotation d'angle θ .
- (ii) Si $\varepsilon = -1$, alors A est la matrice d'une isométrie vectorielle du plan qui est une réflexion d'axe la droite d'angle $\theta/2$.

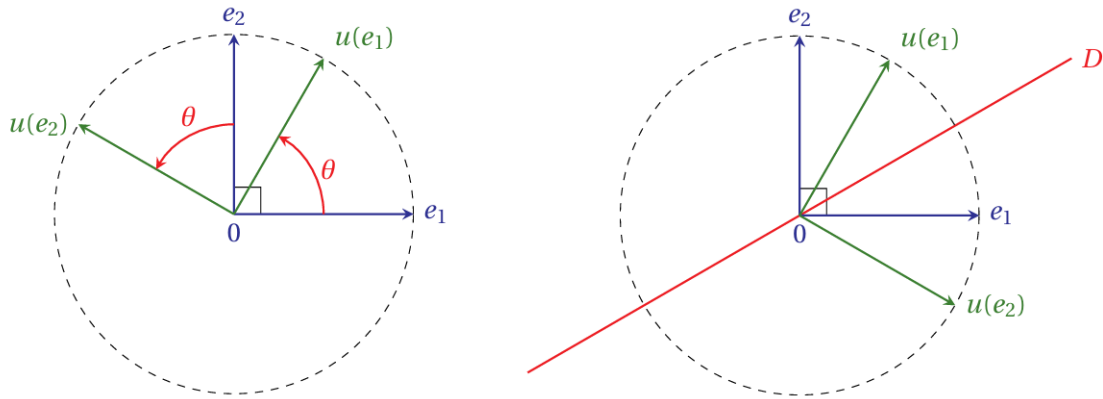


FIGURE 5 – Illustration des isométries vectorielles en dimension 2.

Théorème 1.24. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$, alors dans une base orthonormale, A peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} I_k & & & & \\ & -I_p & & & \\ & & R(\theta_1) & & \\ & & & R(\theta_2) & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & R(\theta_q) \end{pmatrix},$$

avec pour tout $\theta \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$, $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et $k + p + 2q = n$.

2 Utilisation des groupes

2.1 Action de groupes

Nous allons voir ici le lien fort entre géométrie et théorie des groupes via le fait que l'on peut agir sur une structure géométrique.

Soit X un ensemble fini. On considère une action $\cdot$ de G sur X .

Théorème 2.1. (*Formule des classes*) Si G est un groupe fini, on considère Ω un système de représentants des orbites de l'action de G sur X . Alors :

$$|X| = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{|G|}{|Stab_G(\omega)|}.$$

Définition 2.2. On définit l'ensemble $X^g := \{x \in X / g \cdot x = x\}$ comme étant l'ensemble des points de X laissés fixes par $g \in G$.

Théorème 2.3. (*Formule de Burnside*) Si G est un groupe fini, on note r le nombre d'orbites de X sous l'action de G , alors :

$$r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

Application 2.4. Le nombre de colorations distinctes d'un cube avec c couleurs est de :

$$\frac{c^2}{24}(c^4 + 3c^2 + 12c + 8).$$

2.2 Isométries affines

L'autre utilisation de la notion de groupe en géométrie est plutôt intuitive, elle provient du fait d'étudier les transformations géométriques de l'espace : les isométries affines.

2.2.1 Premiers résultats [1]

Définition 2.5. Un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ est un espace affine dirigé par un espace vectoriel euclidien $(E, \|\cdot\|, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. On définit la distance entre deux points A et B par : $d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$.

Définition 2.6. Une application affine $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est une isométrie affine si :

$$d(\varphi(A), \varphi(B)) = d(A, B),$$

pour tout A et B des points de $\mathcal{E}$.

On note $Isom(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries affines de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.

Proposition 2.7. Une isométrie (au sens métrique, qui conserve la distance) est une isométrie affine. C'est-à-dire, si :

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|,$$

alors f est linéaire, quitte à considérer $g = f - f(0)$.

Remarque 2.8. Dans la suite, si on parle d'isométrie sans forcément préciser, cela représentera une isométrie affine.

Définition 2.9. Soit φ une isométrie affine. φ est dite directe si $\vec{\varphi} \in O(E)$ est de déterminant 1. Elle est dite indirecte dans le cas contraire.

Exemple 2.10. Les translations sont des isométries affines.

Exemple 2.11. Les symétries orthogonales et les réflexions sont des isométries.

Remarque 2.12. Les homothéties de rapport λ ne sont, en général, pas des isométries affines car elles multiplient les distances par $|\lambda|$. Donc une homothétie de rapport λ est une isométrie si et seulement si $\lambda = 1$ (cas de l'identité) ou $\lambda = -1$ (cas d'une symétrie centrale).

Proposition 2.13. Les ensembles $O(E)$ et $Isom(E)$ munis de la composition sont des groupes.

2.2.2 Classification des isométries affines [1] [6] [2]

Nous avons vu quelques résultats sur les isométries affines et surtout quelques exemples (translations, symétries etc...), cela nous amène donc à nous demander : est-il possible de trouver une classification des isométries affines, ou au moins dans le plan et l'espace ?

La réponse est oui, les théorèmes qui suivent sont là pour énoncer une classification des isométries affines du plan et de l'espace.

Théorème 2.14. Les isométries affines du plan sont :

- (i) les translations (isométrie directe),
- (ii) les rotations (isométrie directe),
- (iii) les réflexions (isométrie indirecte),
- (iv) les symétries glissées (isométrie indirecte), c'est-à-dire une composée commutative d'une réflexion et d'une translation dans l'axe de la réflexion.

Pour trouver les isométries affines de l'espace, il nous faut utiliser le théorème 1.24 pour trouver la forme des isométries vectorielles de l'espace afin de trouver les isométries affines via le théorème de décomposition canonique d'une isométrie affine.

Théorème 2.15. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Si $A \in O_3(\mathbb{R})$ alors il existe un unique couple $(\theta, \varepsilon) \in [0, 2\pi[\times \{\pm 1\}$ tel que dans une base orthonormée, A s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.16. Pour simplifier les notations, on note A la matrice ci-dessus. Alors :

- (i) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, alors A est la matrice d'une réflexion vectorielle par rapport au plan engendré par (e_1, e_2) ,
- (ii) Soit $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on dit alors que A est une matrice d'une rotation vectorielle d'axe e_3 , si de plus $\theta = \pi$, on dit que A est un retournement,

(iii) Soit $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, alors on dit que A est une antirotation (composée d'une réflexion par rapport au plan engendré par (e_1, e_2) et d'une rotation d'axe e_3).

Avec cette classification des isométries vectorielles de l'espace, on peut déduire une classification des isométries affines de l'espace affine euclidien.

Théorème 2.17. *Les isométries affines de l'espace sont :*

- (i) les translations (isométrie directe),
- (ii) les rotations (isométrie directe),
- (iii) vissage, c'est-à-dire la composée commutative d'une rotation et d'une translation (isométrie directe)
- (iv) les réflexions (isométrie indirecte),
- (v) les symétries glissées (isométrie indirecte),
- (vi) les antirotations, la composée d'une réflexion et d'une rotation avec l'axe avec le plan de la réflexion perpendiculaire avec l'axe de la rotation (isométrie indirecte).

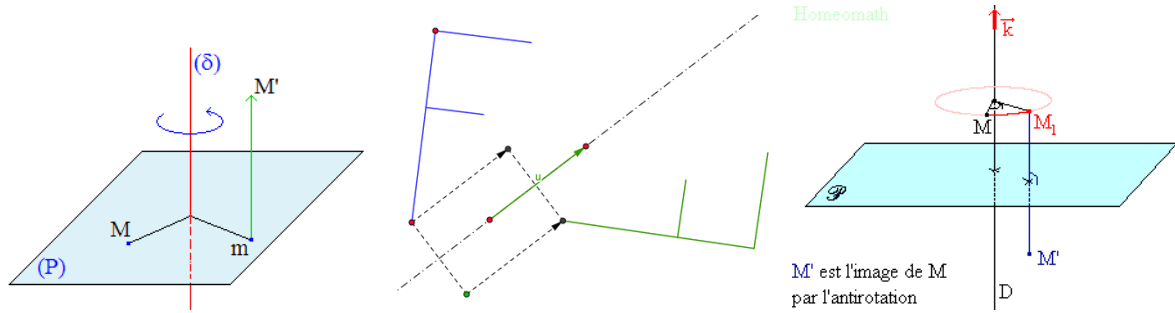


FIGURE 6 – Illustrations d'isométries de l'espace affine euclidien.

2.3 Isométries laissant invariant un polygone

2.3.1 Le groupe diédral

Nous allons voir dans cette partie un ensemble d'isométries qui conservent les sommets d'un polygone du plan : le groupe diédral.

Définition 2.18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle groupe diédral, noté D_n le sous groupe de $GL_2(\mathbb{R})$ engendré par la symétrie axiale σ et la rotation τ d'angle $\theta = 2\pi/n$ définies respectivement par les matrices :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } R = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.19. On a par exemple $D_1 = \{id, \sigma\}$.

Proposition 2.20. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors :

- (i) D_n est un groupe d'ordre $2n$,
- (ii) on a les relations suivantes : $\tau^n = \sigma^2 = id$ et $\sigma\tau = \tau^{-1}\sigma$.

Proposition 2.21. Tout groupe non cyclique d'ordre 4 est isomorphe à D_2 .

Exemple 2.22. On a $\mathfrak{S}_2 \simeq D_2$.

Proposition 2.23. Un groupe fini d'ordre $2p$ avec p premier est soit cyclique soit isomorphe à D_p .

Exemple 2.24. On a $\mathfrak{S}_3 \simeq D_3$.

Proposition 2.25. Les sous-groupes de D_n sont soit cyclique, soit isomorphes à un D_m avec $m \mid n$.

Théorème 2.26. On désigne par Γ_n l'ensemble des sommets d'un polygone régulier à n côtés et par $\text{Isom}(\Gamma_n)$ l'ensemble des isométries qui conservent Γ_n . Alors :

$$\text{Isom}(\Gamma_n) = D_n.$$

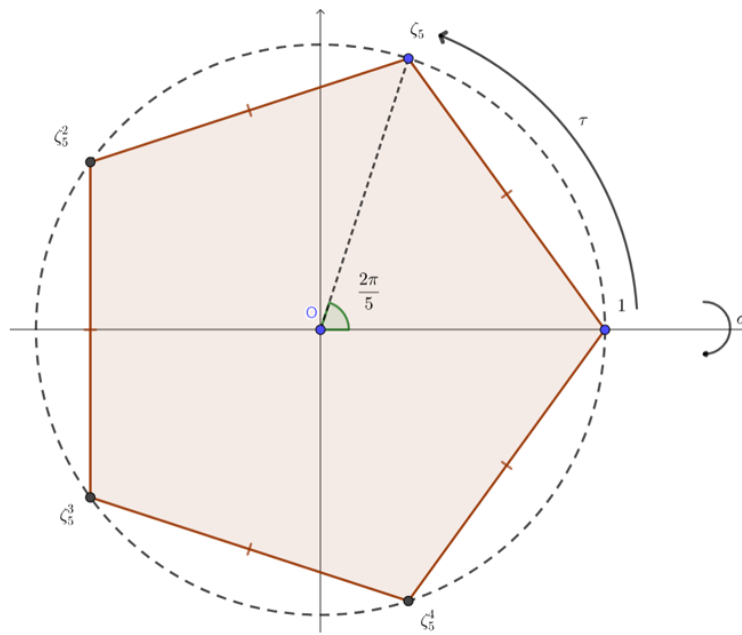


FIGURE 7 – Illustration géométrique de D_{10} , avec $\zeta_5 = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

Exemple 2.27. Les isométries conservant un triangle équilatéral ABC sont les éléments de D_3 , c'est-à-dire si on note O l'isobarycentre de A , B et C :

- (i) l'identité,
- (ii) les deux rotations d'angles $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$ de centre O ,
- (iii) les trois symétries par rapport, respectivement, aux axes (OA) , (OB) et (OC) .

2.3.2 Isométries conservant une figure [2] [6]

Dans cette partie, nous allons plutôt travailler dans l'espace et étudier par exemple les isométries conservant le cube, le tétraèdre...

Proposition 2.28. Le groupe des isométries positives du cube est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$ et le groupe des isométries du cube est isomorphe à $\mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Démonstration. Soit $\mathcal{C}$ un cube, on note $\mathcal{S} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4\}$. Alors les sommets sont stables par l'ensemble des isométries du cube.

On considère l'ensemble des 4 grandes diagonales du cube $\mathcal{D} = (D_1, D_2, D_3, D_4)$ (définies respectivement par les droites $(A_i B_i)$), alors $\mathcal{D}$ est stable par les isométries car elles conservent les distances et que les grandes diagonales sont les plus grandes distances entre deux sommets du cube.

Donc une isométrie u du cube induit une permutation $\sigma_u \in \mathfrak{S}_4$ telle que, si $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, on a : $u(D_k) = D_{\sigma_u(k)}$.

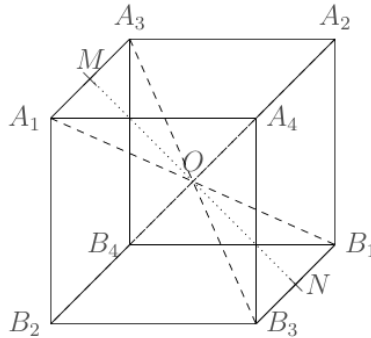


FIGURE 8 – Cube.

On fait agir $Isom(\mathcal{C})$ sur $\mathcal{D}$ avec le morphisme :

$$\begin{array}{ccc} \varphi & : & Isom(\mathcal{C}) \rightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{D}) \simeq \mathfrak{S}_4 \\ & & u \mapsto \sigma_u \end{array}.$$

Étudions maintenant notre morphisme de groupes φ .

Surjectivité : On considère M le milieu de $[A_1, A_2]$ et N le milieu de $[B_1, B_2]$, alors la transposition (D_1, D_2) est en fait réalisée par le retournement d'axe (MN) . Donc la permutation $(D_1 D_2)$ est dans l'image de φ .

De même, toutes les transpositions de $\mathfrak{S}_4$ sont dans $\text{Im}(\varphi)$. Or les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_4$, donc φ est surjective.

Étude du noyau de φ : Soit $u \in \ker(\varphi)$, alors si on considère une grande diagonale D_i , pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, la diagonale D_i est fixée par u . Pour la suite, on considère D_1 sans perte de généralité. Donc nécessairement, l'isométrie u fixe les sommets A_1 et B_1 ou les échange.

Si l'isométrie u fixe A_1 et B_1 , alors comme u conserve les distances et que $u(A_2) \in \{A_2, B_2\}$, on a nécessairement $u(A_2) = A_2$ et donc $u(B_2) = B_2$.

De même pour les autres points, on montre que $u(A_i) = A_i$ et $u(B_i) = B_i$, donc comme u coïncide avec id sur un repère affine, on a $u = id$.

Si l'isométrie u échange A_1 et B_1 , alors $s_O \circ u(A_1) = A_1$ avec s_O la symétrie centrale de centre O (le centre du cube).

Alors par conservation des grandes diagonales, $s_O \circ u$ stabilise B_1 , donc d'après le premier cas, $s_O \circ u = id$. Donc $u = s_O$.

Donc $\ker(\varphi) = \{id, s_O\}$.

D'après le premier théorème d'isomorphisme, on a :

$$Isom(\mathcal{C}) / \{id, s_O\} \simeq \mathfrak{S}_4.$$

Or s_O est une isométrie négative, donc :

$$Isom^+(\mathcal{C}) \simeq \mathfrak{S}_4.$$

Or : $[Isom(\mathcal{C}), Isom^+(\mathcal{C})] = 2$, donc :

$$Isom(\mathcal{C}) \simeq \mathfrak{S}_4 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Or l'isométrie s_O est centrale car elle commute avec toutes les transpositions, donc $\{id, s_O\} \triangleleft Isom(\mathcal{C})$, donc le produit précédent est en fait direct, donc :

$$Isom(\mathcal{C}) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

□

Remarque 2.29. Dans la propriété 2.28, il est dit « isométries du cube » car dans les faits, cela ne dépend pas du cube choisit : quitte à composer par une translation, on peut se ramener à un cube choisit.

Proposition 2.30. *Le groupe des isométries du tétraèdre régulier est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.*

Application 2.31. Le nombre de colorations distinctes d'un cube avec c couleurs est de :

$$\frac{c^2}{24}(c^4 + 3c^2 + 12c + 8).$$

Exemple 2.32. Il y a 57 façons de colorier un cube avec au plus trois couleurs.

3 La théorie des corps [5]

Définition 3.1. Si A est une partie de $\mathbb{R}^2$, et $M \in \mathbb{R}^2$, on dit que M est constructible à la règle et au compas à partir de A si M est l'intersection d'une droite ou d'un cercle tracé à partir de A avec une droite ou un cercle tracé à partir de A .

Exemple 3.2. Chaque point de A est constructible à la règle et au compas à partir de A .

Définition 3.3. Un point M est dit constructible à la règle et au compas s'il est constructible à partir de $(0, 0)$ et $(0, 1)$; où à partir d'autres points constructibles.

Définition 3.4. Un réel $x \in \mathbb{R}$ est dit constructible si $M = (0, x)$ l'est.

Proposition 3.5. *Tout rationnel est constructible.*

Proposition 3.6. Soit $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ un point de l'espace. Alors M est constructible si et seulement si x et y le sont.

Théorème 3.7. *L'ensemble des réels constructibles est un sous-corps de $\mathbb{R}$ stable par racine carrée.*

Théorème 3.8. (Wantzel) *Un réel t est constructible si et seulement s'il existe une suite finie $(\mathbb{L}_0, \dots, \mathbb{L}_n)$ de sous-corps de $\mathbb{R}$ vérifiant :*

- (i) $\mathbb{L}_0 = \mathbb{Q}$,
- (ii) pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $\mathbb{L}_{i+1}$ est une extension quadratique de $\mathbb{L}_i$ (ie. $[\mathbb{L}_{i+1}, \mathbb{L}_i] = 2$),
- (iii) $t \in \mathbb{L}_n$.

Corollaire 3.9. *Si x est constructible, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $[\mathbb{Q}(x), \mathbb{Q}] = 2^p$.*

Application 3.10. La duplication du cube à la règle et au compas est impossible. De plus, en admettant la transcendance de π , la quadrature du cercle est impossible à la règle et au compas.

Remarque 3.11. La théorie des corps avec l'ensemble des nombres constructibles permet donc de répondre sous certaines conditions aux trois grands problèmes de l'Antiquité (quadrature du cercle, trisection de l'angle, duplication du cube). Le problème de la quadrature du cercle est celui qui a persisté le plus longtemps aux mathématiciens, Archimède montra notamment que ce problème se ramène en fait à la construction d'un segment de longueur π (en utilisant une spirale d'Archimède), d'où le lien avec la transcendance de π .

Références

- [1] M. Audin. *Géométrie*. Collection Enseignement sup. Mathématiques, 2006.
- [2] Germoni J. Caldero, P. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries*. 2018.
- [3] Gianella H. Nicolas S. Francinou, S. *Oraux X-ENS Algèbre 3*. Cassini, 2013.
- [4] X. Gourdon. *Algèbre probabilités*. 2021.
- [5] I. Gozard. *Théorie de Galois*. Ellipses, 2009.
- [6] J. Grifone. *Algèbre linéaire*. 2018.
- [7] D. Perrin. *Cours d'algèbre*. 1995.