

Fonctions méromorphes sur le Tore

Axel Rogue

Décembre 2013

Dans toute la suite, on notera :

- $\Gamma = \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$ un réseau de \mathbb{C} , avec ω_1 et $\omega_2 \in \mathbb{C}$ et \mathbb{R} -indépendants.
- $T = \mathbb{C}/\Gamma$ le tore complexe associé.

Rappelons que T est alors muni d'une structure de surface de Riemann.

L'objet de ce texte est de déterminer quelles sont les fonctions méromorphes sur T . On utilisera parfois qu'on peut voir une fonction méromorphe $T \rightarrow \mathbb{C}$ comme une fonction holomorphe $T \rightarrow \mathbb{P}^1$.

Définition 1 Une fonction elliptique est une fonction méromorphe sur T . Cela est équivalent à être une fonction méromorphe sur \mathbb{C} doublement périodique de périodes ω_1 et ω_2 .

Remarque 2 On ne s'intéresse pas aux fonctions holomorphes sur le Tore. En effet, elles sont alors bornées sur tout \mathbb{C} par périodicité, et donc constantes par le théorème de Liouville.

On note par $P = \{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 | \lambda, \mu \in [0, 1]\}$ le domaine fondamental de Γ . On pourra supposer quand on aura besoin que ∂P ne contient ni pôles ni zéros de f . En effet, les zéros de f étant isolés, on peut translater P pour les éviter.

Définition 3 Pour une fonction elliptique, on pose : $\text{Ordre}(f) = \sum$ multiplicité des pôles de f dans P .

Propriété 4 Soit f une fonction elliptique La somme des résidus de f dans P est nulle.

Preuve : On découpe ∂P en 4 chemins le long de ses cotés : $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$. Par périodicité de f , on a que :

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = - \int_{\gamma_3} f(z)dz$$
$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = - \int_{\gamma_4} f(z)dz$$

Et donc :

$$\int_{\partial P} f(z)dz = 0 \quad \square$$

Cette propriété a une conséquence importante sur les fonctions qui existent sur le tore :

Propriété 5 Il n'existe pas de fonction elliptique d'ordre 1

Preuve : Supposons qu'une telle fonction f existe. Elle a donc un unique pôle d'ordre 1 en $a \in P$, $a \notin \partial P$. Dans un voisinage de a , f s'écrit $f = \sum_{k=-1}^{+\infty} (z-a)^k c_k$, avec $a_{-1} \neq 0$. Or a_{-1} est le seul résidu de f dans P , donc doit être nul. C'est absurde. \square

Pour construire des fonctions méromorphes non-constantes, il va donc falloir se placer en degré supérieur. Pour savoir à quoi peuvent ressembler ces fonctions, on peut utiliser le

Théorème 6 Soit f elliptique d'ordre $N > 0$. Alors, $\forall a \in \mathbb{P}^1$, $f(z) = a$ a exactement N solutions dans P (comptées avec multiplicité).

Preuve : Pour $a = +\infty$, il s'agit de la définition. Pour $a \in \mathbb{C}$. On peut supposer que $a = 0$ quitte à considérer $f - a$. On pose $g = \frac{f'}{f}$ qui est une fonction méromorphe sur \mathbb{C} , et qui est elliptique car f et f' le sont.

Les pôles de f sont aussi pôles de f' (de degré supérieur), et sont donc aussi les pôles de g . D'où : x est un pôle de $g \Leftrightarrow x$ est un zéro ou un pôle de f .

Calculons le résidu de g en ces points.

– Soit c un un zéro de f dans P , d'ordre k . Dans un voisinage de f , on sait que f et g s'écrivent :

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-a)^k f_1(z) \\ f'(z) &= k(z-a)^{k-1} f_1(z) + (z-a)^k f_1'(z) \end{aligned}$$

avec f_1 holomorphe et $f_1(a) \neq 0$. Ce qui nous donne

$$g(z) = k(z-a)^{-1} + \frac{f_1'(z)}{f_1(z)}$$

Et donc $Res_c(g) = k$.

– Par un calcul similaire, on obtient que si d est un pole de f d'ordre k , $Res_a(g) = -k$.

La somme des résidus de g sur P étant nulle, on doit obligatoirement avoir autant de zéros de f que de pôles de f dans P (compté avec multiplicité), c'est à dire N . \square

Ainsi, pour construire des fonctions méromorphes, on est tenté de prendre une fonction ayant un pole d'ordre 2 en tout point du réseau. Cependant, il faut faire attention à la légalité de ce choix. C'est pour cela que l'on va s'intéresser à un théorème de convergence sur un réseau.

Pour $r \in \mathbb{Z}$, on pose $\Gamma_r = \{a\omega_1 + b\omega_2 \mid a, b \in \mathbb{Z}, \max(|a|, |b|) = r\}$.

Lemme 7 $Card(\Gamma_r) = 8r$

Preuve : $\Gamma_r = \{(a, n), a \in \llbracket -n, n \rrbracket\} \cup \{(a, -n), a \in \llbracket -n, n \rrbracket\} \cup \{(n, b), b \in \llbracket -n, n \rrbracket\} \cup \{(-n, b), a \in \llbracket -n, n \rrbracket\}$.

Chacun de ces ensembles est de cardinal $2n + 1$, et il y a 4 points qui apparaissent dans 2 ensembles chacun. A savoir $(n, n), (-n, n), (n, -n), (-n, -n)$. \square

A partir de ces ensembles, on peut définir une somme sur le réseau, comme étant

$$\sum_{\omega \in \Gamma} \frac{1}{|\omega|^s} = \sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{\omega \in \Gamma_r}$$

On a alors un résultat de convergence analogue à la série harmonique en dimension 1.

Propriété 8 Soit $s \in \mathbb{R}$. Alors

$$\sum_{\omega \in \Gamma^*} \frac{1}{|\omega|^s} \text{ converge } \Leftrightarrow s > 2$$

Preuve : $\Pi_r = \{a\omega_1 + b\omega_2 \mid a, b \in \mathbb{R}, \max(|a|, |b|) = r\}$. Comme Π_1 est un compact, le *min* et le *max* de $|\bullet|$ sont atteint sur Π_1 . $d = \min_{\Pi_1} |\bullet|$ et $D = \max_{\Pi_1} |\bullet|$ sont bien définis.

$\Omega_r \subset \Pi_r = r\Pi_1$, donc, $\forall \omega \in \Gamma_r, rD \geq |\omega| \geq rd$, soit en posant $S_r = \sum_{\omega \in \Gamma_r} |\omega|^{-s}$:

$$\sum_{\Gamma_r} (rd)^{-s} \leq S_r \leq \sum_{\Gamma_r (rD)^{-s}}$$

$$8r^{1-s}d^{-s} \leq S_r \leq 8r^{1-s}D^{-s}$$

En observant l'exposant de r , on a bien que $\sum S_r$ converge si et seulement si $s > 2$. \square

Cela va nous permettre de définir simplement des fonctions supérieur d'ordre 3 et plus. En revanche, pour l'ordre 2, une construction un peu plus subtile sera nécessaire.

Définition-Propriété 9

Pour tout $N \geq 3$, on définit $F_N = \sum_{\omega \in \Gamma} \frac{1}{(z-\omega)^N}$. F_N est elliptique d'ordre N .

Preuve : Soit K un compact de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. K est borné, donc il existe un ensemble fini $\Phi \subset \Gamma$ tel que $\forall \omega \in \Gamma \setminus \Phi, |\omega| \geq 2\delta(K)$.

$$\forall z \in K, \forall \omega \notin \Phi, |z - \omega| \geq |\omega| - |z| \geq \frac{|\omega|}{2}$$

$$\forall z \in K, \forall \omega \notin \Phi, \|(z - \omega)^{-N}\|_K \leq 2^N |\omega|^{-N}$$

Comme Φ est fini, en utilisant **8**, la série $\sum_{\Gamma} (z - \omega)^{-N}$ converge normalement sur K . Donc F_N est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. L'étude des pôles nous donne que F_N est méromorphe sur \mathbb{C} avec un pôle d'ordre N en chacun des points du réseau. La double périodicité le long du réseau vient du fait que la convergence absolue de la série nous permet d'en réarranger les termes. F_N est donc bien elliptique d'ordre N \square

Pour créer une fonction d'ordre 2, il faut être un peu plus précis pour obtenir la convergence :

Définition-Propriété 10 On définit la fonction de Weierstrass

$$\mathcal{P} : z \mapsto \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Gamma^*} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

\mathcal{P} est une fonction elliptique d'ordre 2.

Preuve : Soit K un compact de \mathbb{C} . K est donc borné, et il est facile de se convaincre que pour $|\omega|$ assez grand, on a, pour tout $z \in K$, $\frac{|z^2 - 2\omega z + \omega^2|}{|z^2 - 2\omega z|} > |\omega|$. On note Φ l'ensemble (borné donc fini) de ω pour lesquels cette inégalité n'est pas vérifiée. Alors :

$$\forall z \in K, \forall \omega \in \Gamma \setminus \Phi, \frac{|\omega^2 z^2 - 2\omega^3 z + \omega^4|}{|z^2 - 2\omega z|} > |\omega|^3$$

$$\forall z \in K, \forall \omega \in \Gamma \setminus \Phi, \frac{|\omega^2(z - \omega)^2|}{|\omega^2 - (z - \omega)^2|} > |\omega|^3$$

$$\forall z \in K, \forall \omega \in \Gamma \setminus \Phi, \left| \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| < \frac{1}{|\omega|^3}$$

Donc, \mathcal{P} peut se décomposer en une somme finie de fonctions méromorphes et une somme convergent normalement sur K . par théorème de convergence de séries de fonctions méromorphes, \mathcal{P} est méromorphe sur K . Cela est vrai pour tout compact K , donc \mathcal{P} est méromorphe sur \mathbb{C} avec un pôle d'ordre 2 en chaque point du réseau.

$$\mathcal{P}' = \frac{-2}{z^3} - \sum_{\omega \in \Gamma^*} \frac{2}{(z-\omega)^3} = -2F_3(z). \text{ Donc } \mathcal{P}' \text{ est périodique.}$$

$$\forall \omega \in \Gamma, \quad \mathcal{P}'(z + \omega) - \mathcal{P}'(z) = 0$$

$$\forall \omega \in \Gamma, \quad \mathcal{P}(z + \omega) - \mathcal{P}(z) = cte$$

$$\forall \omega \in \Gamma, \quad \mathcal{P}\left(\frac{\omega}{2}\right) - \mathcal{P}\left(\frac{-\omega}{2}\right) = cte$$

Comme \mathcal{P} est paire la constante est nulle est donc \mathcal{P} est périodique. \mathcal{P} est bien elliptique d'ordre 2. \square

Muni de cette fonction \mathcal{P} , nous allons pouvoir nous attaquer au résultat principal de ce texte, le théorème **13**. Il nous reste tout d'abord à établir deux lemmes qui serviront dans la démonstration.

Lemme 11 *Si f et g sont deux fonctions elliptiques ayant des pôles et des zéros de mêmes ordres aux mêmes points, alors il existe $c \neq 0 \in \mathbb{C}$ tel que $f = cg$.*

Preuve : $\frac{f}{g}$ est une fonction elliptique d'ordre 0, donc est une constante. \square

Lemme 12 $\exists e_1, e_2, e_3 \in P$ tels que $\forall c \in P, c \notin \{e_1, e_2, e_3, \infty\}, \mathcal{P}(z) = c$ a deux racines distinctes dans P .

Preuve : \mathcal{P}' est d'ordre 3, donc par **6**, a 3 zéros dans P . Ainsi, il y a au plus 3 points de P où $\mathcal{P} - c$ peut avoir une racine double. \square

Théorème 13

- Si f est elliptique paire, $f = R_1(\mathcal{P})$, avec $R_1 \in \mathbb{C}(X)$.
- Si f est elliptique, $f = R_1(\mathcal{P}) + \mathcal{P}'R_2(\mathcal{P})$, avec $R_1, R_2 \in \mathbb{C}(X)$

Preuve :

1) Soit f elliptique paire, non-constante, d'ordre $N > 0$. Soit $k \in T$. f' étant également elliptique, le nombre de k dans T pour lesquels $f(z) = k$ est à racines multiples est fini. Donc il existe c et d dans T tels que $c \neq d$, et $f(z) - c$ et $f(z) - d$ ait des racines simples différentes de 0, $\mathcal{P}^{-1}(e_1)$, $\mathcal{P}^{-1}(e_2)$, $\mathcal{P}^{-1}(e_3)$. On note :

$$\{a_1, -a_1, a_2, -a_2, \dots, a_n, -a_n\} = \{z \in T | f(z) = c\}$$

$$\{b_1, -b_1, b_2, -b_2, \dots, b_n, -b_n\} = \{z \in T | f(z) = d\} \text{ (les ensembles sont bien de cette forme}$$

par parité de f). On définit alors deux fonctions :

$$g : z \mapsto \frac{f(z) - c}{f(z) - d}$$

$$h : z \mapsto \frac{(\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(a_1))(\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(a_2)) \dots (\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(a_n))}{(\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(b_1))(\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(b_2)) \dots (\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(b_n))}$$

g et h ainsi construites ont exactement les mêmes pôles et zéros et tous sont simples. Par lemme, $g = \mu h$ avec $\mu \neq 0$, et donc $f = \frac{c-d\mu h}{1-\mu h}$, qui est bien une fraction rationnelle en \mathcal{P} .

2) Si f est elliptique impaire, alors $\frac{f}{\mathcal{P}'}$ est elliptique paire et par le 1) on a $f = \mathcal{P}'R_2(\mathcal{P})$. Or, la décomposition d'une fonction elliptique quelconque en parties paires et impaires donne deux fonctions qui sont également elliptiques (à savoir $\frac{1}{2}(f(z) + f(-z))$ et $\frac{1}{2}(f(z) - f(-z))$). D'où l'écriture $f = R_1(\mathcal{P}) + \mathcal{P}'R_2(\mathcal{P})$. \square

Conclusion : $\mathcal{M}(T) = \mathbb{C}(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$

Nous avons finalement obtenu l'ensemble des fonctions méromorphes sur T .

Cela ne sera pas démontré ici, mais il est intéressant de noter que \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont reliées par l'équation différentielle suivante, qui peut notamment donner une idée de pourquoi les fonctions méromorphes sur T sont appelées elliptiques :

$$\mathcal{P}' = 4\mathcal{P}^3 + c_1(\Gamma)\mathcal{P} + c_2(\Gamma)$$

Bibliographie

[1] Complex functions : An algebraic and geometric viewpoint chez Cambridge University Press par **Gareth A. Jones** et **David Singerman** (1987)