

Linéarisation de germes en dimension 1

Axel Rogue

Février-Mars 2014

On s'intéresse ici à l'ensemble des germes de biholomorphismes en 0 de dimension 1 s'annulant à l'origine. Cet ensemble sera noté $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$.

L'objectif est d'étudier les possibilités de linéarisations de tels germes.

Pour f un élément de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$, on pose $\lambda = \lambda(f) = f'(0)$ le multiplicateur de f , et on dit : on dit que :

- f est analytiquement linéarisable (on abrègera en linéarisable) s'il existe un germe de difféomorphisme Φ tel que $\Phi \circ f = \lambda\Phi$.
- f est formellement linéarisable s'il existe une série formelle Φ telle que $\Phi \circ f = \lambda\Phi$ et $\Phi'(0) \neq 0$.

1 Linéarisation analytique

Le premier résultat obtenu historiquement est le théorème de Koenigs-Poincaré ([1])

Théorème 1 *Soit f un élément de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$.*

Si $|f'(0)| \neq 1$, alors f est analytiquement linéarisable.

Démonstration : Il est facile de voir que f est linéarisable de multiplicateur λ si et seulement si f^{-1} est linéarisable de multiplicateur λ^{-1} . Quitte à travailler avec f^{-1} au lieu de f , on supposera que $|\lambda| < 1$. Choisissons un réel μ tel que $0 < \mu^2 < |\lambda| < \mu < 1$. On obtient par le développement en série entière de f l'existence d'un disque D centré en 0 tel que :

$$\mu^2 |z| < |f(z)| < \mu |z| \quad (1)$$

On peut supposer, quitte à restreindre D à un disque plus petit, que $\text{rayon}(D) < 1$ car on a supposé $|\lambda| < 1$. Ainsi, on a $f(D) \subset D$ et on peut considérer des itérations de f . Par (1), on a pour n entier et z dans D que $|f^n(z)| < \mu^n |z|$, où f^n note l'itéré n -ième de f . On construit directement la coordonnée linéarisante Φ en posant

$$\Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n}{\lambda^n}$$

Avant de vérifier que Φ est bien la fonction que l'on cherche, il faut s'assurer qu'elle est bien définie et holomorphe. Le développement de Taylor à l'ordre 2 en 0 donne :

$$\exists \delta \in \mathbb{R} \quad \forall z \in D \quad |f(z) - \lambda z| \leq \delta z^2 \quad (2)$$

Une application répétée de l'inégalité triangulaire donne, pour tout n entier et z dans D :

$$|f^n(z) - \lambda^n z| \leq \sum_{k=1}^n |\lambda|^{n-k} |f^k(z) - \lambda f^{k-1}(z)|$$

Par (2),

$$\begin{aligned}
|f^n(z) - \lambda^n z| &\leq \sum_{k=1}^n |\lambda|^{n-k} \delta |f^{k-1}(z)|^2 \\
&\leq \sum_{k=1}^n |\lambda|^{n-k} \delta \mu^{2(k-1)} |z|^2 \\
&\leq |z|^2 \delta |\lambda|^{n-1} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\mu^2}{|\lambda|}\right)^{k-1} \\
&\leq \delta |z|^2 |\lambda|^{n-1} \frac{1}{1 - \frac{\mu^2}{|\lambda|}} \\
|f^n(z) - \lambda^n z| &\leq |z|^2 |\lambda|^n C
\end{aligned} \tag{3}$$

où $C = \frac{\delta}{|\lambda| - \mu^2}$. Montrons que Φ est une limite uniforme de fonctions holomorphes.

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f^{n+p}(z)}{\lambda^{n+p}} - \frac{f^n(z)}{\lambda^n} \right| &\leq \frac{1}{|\lambda^{n+p}|} |f^{n+p}(z) - \lambda^p f^n(z)| \\
&\leq \frac{1}{|\lambda^{n+p}|} |f^p(f^n(z)) - \lambda^p f^n(z)| \quad \text{par (3)} \\
&\leq C \frac{|f^n(z)|^2}{|\lambda|^n} \\
&\leq C \left(\frac{\mu^2}{|\lambda|}\right)^n |z|^n \\
&\leq C \left(\frac{\mu^2}{|\lambda|}\right)^n
\end{aligned}$$

Φ existe donc bien en tant que limite de la suite $\frac{f^n}{\lambda^n}$ est elle est holomorphe. De plus, on a pour z dans D que :

$$\Phi \circ f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(f(z))}{\lambda^n} = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{n+1}(z)}{\lambda^{n+1}} = \lambda \Phi(z)$$

Et f est analytiquement linéarisable. \square

L'étude du cas $|f'(0)| = 1$ est plus délicate si l'on veut s'en tenir à la linéarisation analytique. On peut toutefois commencer par mentionner un résultat simple, le théorème du domaine invariant :

Théorème 2 Si $|f'(0)| = 1$ et f_1 est un représentant de f défini sur $D(0, \rho)$, les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est linéarisable.
2. Il existe un ouvert simplement connexe V contenant 0 avec $V \subset D(0, \rho)$ et $f_1(-V) = V$.

Démonstration : Le sens direct s'obtient en considérant $V = \Phi^{-1}(D(0, \delta))$ avec $\delta < \rho$. On a $\lambda \Phi(V) = \Phi(V)$, et donc $f(V) = V$.

Supposons 2 à présent. Par le théorème de l'application conforme, on peut se ramener de manière biholomorphe au cas $V = D(0, 1)$. Sur V , f_1 est de la forme $f_1 = \lambda z U(z)$ où U est une

fonction biholomorphe vérifiant $U(0) = 1$. Par hypothèse, on a que $|f(z)| \leq 1$ pour z dans V , d'où $|U(z)| \leq 1$.

Or, $U(0) = 1$, donc le principe du maximum implique que U est constante. On a donc $f(z) = \lambda z$, et l'application conforme ayant permis de ramener V à $D(0, 1)$ est la coordonnée linéarisante recherchée. \square

2 Linéarisation formelle

On peut s'intéresser à un problème plus faible en ne demandant que la linéarisation formelle, auquel cas on peut affirmer que :

Propriété 3 *Si λ n'est pas une racine de l'unité, f est formellement linéarisable.*

Démonstration : En notant u une coordonnée formelle, on peut écrire

$$u \circ f = \lambda u + \sum_{j \geq 2} a_j u^j$$

Si l'on considère $z = u + \sum_{j \geq 2} b_j u^j$ une coordonnée formelle indéterminée, on voit en développant l'expression $z \circ f = \lambda z$ qu'il existe des polynômes P_n de degré $2n - 2$, à coefficients entiers, indépendants de f , u et z tels que l'on ait équivalence entre :

- z linéarise formellement f
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lambda(\lambda^{n-1} - 1)b_n = P_n(\lambda, a_2, \dots, a_n, b_2, \dots, b_{n-1})$

En utilisant que λ n'est pas racine de l'unité, les b_n sont bien définis par récurrence, et on linéarise ainsi f . \square

Il est important de noter que la linéarisation formelle est moins forte que la linéarisation analytique. En effet, s'il est clair qu'une linéarisation analytique peut se voir comme formelle, il est possible d'exhiber un exemple de germe non-linéarisable mais formellement linéarisable.

Nous allons construire un exemple de tel germe. Soit λ de module 1 non racine de l'unité tel qu'il existe un d entier et une infinité de d'entiers n pour lesquels on ait :

$$|\lambda^n - 1| \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{d-1} \tag{4}$$

On peut construire un tel λ en passant par le développement en fractions de continues de son argument, mais nous passerons sur ce point profond. (voir [2])

On considère f le germe donné dans une coordonnée z par :

$$z \circ f = \lambda z + \dots + z^d$$

La condition de périodicité d'un point s'écrit alors :

$$z^{d^n - 1} + \dots + (\lambda^n - 1) = 0$$

Il s'agit d'un polynôme ayant $d^n - 1$ racines non-nulles. Le produit de ces racines a pour module $|\lambda^n - 1|$, donc au moins l'un d'elle est de module inférieur à $1/n$ par (4). Cela implique que f a une infinité de points périodiques qui s'accroissent en 0, et donc n'est pas linéarisable alors qu'il est formellement linéarisable.

3 Théorème de Siegel

Nous venons de voir le lien entre linéarisation formelle et racines de l'unité. Analytiquement, on retrouve ce lien grâce au théorème de Siegel, qui assure la linéarisabilité analytique à partir du moment où λ a un argument "difficilement approchable par des rationnels". La notion précise qui se cache derrière cette intuition est celle de nombre diophantien :

Définition 4 Soit θ un réel. θ est dit diophantien s'il existe c et δ deux réels strictement positifs tels que :

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \quad \forall q \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \theta - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q^\delta}$$

Si λ est de module 1 et s'écrit $\lambda = \exp(2i\pi\theta)$, on peut obtenir une propriété sur λ :

Propriété 5 θ est diophantien si et seulement si il existe un réel strictement positif c' et un entier positif μ tel que :

$$\forall q \in \mathbb{N}, \quad |\lambda^q - \lambda| \geq \frac{c'}{(q-1)^{\mu-1}} \quad (5)$$

Là encore, il s'agit pour λ de ne pas pouvoir être approché trop efficacement par des racines de l'unité. C'est le cas qui nous intéresse dans le théorème de Siegel :

Théorème 6 Si $\lambda = \exp(2i\pi\theta)$ avec θ diophantien, alors f est analytiquement linéarisable

Idées de la démonstration : L'objectif est de construire de manière itérative la coordonnée linéarisante. Pour cela, on utilisera le

Lemme 7 Soit $\lambda = \exp(2i\pi\theta)$ avec θ diophantien. Si $\alpha : D(0, \rho) \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe ayant un zéro d'ordre au moins 2 à l'origine, alors il existe une fonction holomorphe $\beta : D(0, \rho) \rightarrow \mathbb{C}$ ayant un zéro d'ordre au moins 2 à l'origine vérifiant sur $D(0, \rho)$:

$$\alpha(z) = \beta(\lambda z) - \lambda \beta(z) \quad (6)$$

Preuve du lemme : α admet un développements en séries entières de la forme $\sum_{j \geq 2} a_j z^j$. Si β existe, elle admet une écriture similaire $\sum_{j \geq 2} b_j z^j$.

En injectant ces écritures dans l'équation fonctionnelle 6, on obtient qu'elle est équivalente à :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad a_j = b_j(\lambda^j - \lambda)$$

λ n'étant pas une racine de l'unité, il existe bien des uniques b_j telles que l'équation fonctionnelle soit vérifiée. Ces b_j définissent bien un germe car on a :

$$\begin{aligned} |b_j| &\leq |a_j| |\lambda^j - \lambda|^{-1} \\ &\leq \frac{1}{c'} |a_j| (j-1)^{\mu-1} \quad \text{par (5)} \end{aligned}$$

On reconnaît là (à constante multiplicative près) les coefficients de la dérivée $(\mu - 1)$ -ème de α , ce qui nous assure que β a un rayon de convergence d'au moins ρ . \square

Retour au théorème : Pour définir notre récurrence, on commence par définir un opérateur $\tilde{\cdot}$, qui correspond à la partie non-linéaire d'une fonction. Précisément, si g est une fonction holomorphe nulle à l'origine, on pose $\tilde{g}(z) = g(z) - g'(0)z$. Avec ces notations, on a pour toute Ψ telle que $\Psi(0) = 0$ et $\Psi'(0) = 1$:

$$(f \circ \Psi)(z) = \Psi(\lambda z) \iff \tilde{f}(z + \tilde{\Psi}(z)) = \tilde{\Psi}(\lambda z) - \lambda \tilde{\Psi}(z)$$

C'est cela qui va inspirer les définitions récursives qui viennent : On pose $f_0 = f$. Puis, si on suppose f_{n-1} définie, on définit $\tilde{\Psi}_n$ comme étant la fonction obtenue en appliquant le lemme (7) à \tilde{f}_{n-1} , c'est à dire la fonction holomorphe ayant un zéro d'ordre 2 à l'origine vérifiant

$$\tilde{f}_{n-1}(z) = \tilde{\Psi}_n(\lambda z) - \lambda \tilde{\Psi}_n(z)$$

Enfin, on définit :

$$\begin{aligned} \Psi_n(z) &= z + \tilde{\Psi}_n(z) \\ \text{et } f_n(z) &= (\Psi_n^{-1} \circ f_{n-1} \circ \Psi_n)(z) \end{aligned}$$

Le but est à chaque d'étape d'approcher plus encore une linéarisation. En fait, on s'intéresse ici à $\Phi_n = \Psi_1 \circ \dots \circ \Psi_n$ et $f_n = \Phi_n^{-1} \circ f \circ \Phi_n$.

La partie la plus difficile, à la fois fine et calculatoire, consiste à montrer que ces suites convergent uniformément sur un voisinage de 0, ce qui donne l'existence d'une fonction Φ holomorphe telle que $\Phi^{-1} \circ f \circ \Phi(z) = \lambda z$ sur ce voisinage. \square

Merci à Dominique Cerveau pour son temps et ses conseils.

Bibliographie

- [1] G.Koenigs, Recherche sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles. *Ann. Sci Ecole Norm Sup*, 1884
- [2] F.Cano, D.Cerveau, J.Déserti, Théorie élémentaires des feuilletages holomorphes singuliers, *Belin*, 2013
- [3] C.L. Siegel, J.K.Moser, Lectures on celestial mechanics. Classic in Mathematics. *Springer-Verlag*, Berlin, 1995. Translated from the German by C.I.Kalme, Reprint of the 1971 translation