

# Quotients de surfaces de Riemann

Axel Rogue

Novembre 2013

Commençons avant tout par rappeler quelques définitions de base sur les actions de groupes :

**Définition 1 (action libre)** *L'action d'un groupe  $G$  sur un ensemble  $A$  est dite libre si*

$$\forall x \in A, \quad \text{Stab}_G(x) = \{Id\}$$

*Ce qui équivaut à dire qu'aucune application non-triviale de  $G$  n'a de point fixe.*

**Définition 2 (action propre)** *L'action d'un groupe  $G$  sur un espace topologique  $A$  est dite propre si :*

$$\forall K_1, K_2 \text{ compacts de } A, \quad \{g \in G \mid g(K_1) \cap K_2 \neq \emptyset\} \text{ est fini}$$

Nous pouvons désormais nous intéresser au théorème suivant, qui permet d'obtenir de nouvelles surfaces de Riemann en quotientant celles que l'on connaît déjà par des actions de groupes ayant les bonnes propriétés.

**Théorème 3** *Soit  $M$  une surface de Riemann.*

*Le groupe des automorphismes de  $M$ , c'est à dire des fonctions biholomorphes de  $M$  dans elle-même, est noté  $\text{Aut}(M)$ .*

*Soit  $G$  un sous-groupe de  $\text{Aut}(M)$ . Si l'action de  $G$  sur  $M$  est libre et propre, alors  $M/G$  est une surface de Riemann.*

**Preuve :** On commence par prouver que le quotient est séparé.

$M/G$  est défini comme  $\{O_p, p \in M\}$ , avec  $O_p = \{g(p), g \in G\}$  l'orbite du point  $P$ .

**Lemme 4**  $\forall P \in M, \exists U$  voisinage de  $P$  relativement compact tel que :

$$\forall P_1, P_2 \in U, \quad O_{P_1} \neq O_{P_2}$$

**Preuve du lemme :**

Soit  $P \in M$ .  $M$  est une surface de Riemann, donc est localement compacte. Donc il existe une base de voisinages relativement compacts de  $P$  :  $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \dots$ . Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , on pose  $F_m = \{g \in G, g(U_m) \cap U_m \neq \emptyset\}$ .

Par propriété de l'action de  $G$  sur  $M$ , les  $F_m$  sont tous finis. On a également que  $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ . Soit  $g \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} F_m$ . Alors, pour tout  $m$ ,  $g(U_m) \cap U_m \neq \emptyset$ . Or,  $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} U_m = \{P\}$ , donc lorsque  $m \rightarrow +\infty$ , on obtient  $g(P) = P$ . L'action étant libre, cela implique que  $g = Id$  et donc  $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} F_m = \{Id\}$ . Comme les  $F_m$  sont tous finis, la suite est stationnaire à partir d'un certain rang et il existe un  $k$  tel que  $F_k = \{Id\}$ .  $U_k$  est le voisinage de  $P$  recherché.  $\diamond$

Pour un point  $P$  donné, on notera dans la suite  $U_P$  un voisinage de  $P$  dans  $M$  vérifiant la propriété du lemme. Un tel voisinage existant en tout point de  $M$ , on peut recouvrir  $M$  par la famille  $(U_P)_{P \in M}$ . Effectuons désormais la séparation proprement dite.

Soient  $O_{P_1}$  et  $O_{P_2}$  deux éléments de  $M/G$ , respectivement orbites de  $P_1$  et  $P_2$  deux points de  $M$ .

Deux cas se présentent :

- Si  $\exists q_1 \in O_{P_1}, q_1 \in \overline{U_{P_2}}$ , alors, on pose  $W_2$  un voisinage ouvert relativement compact de  $P_2$  contenu dans  $U_{P_2}$  et tel que  $q_1 \notin \overline{W_2}$ . On peut par exemple prendre l'intersection de  $U_{P_2}$  avec le complémentaire d'un voisinage ouvert de  $P_1$ .
- Sinon, on pose  $W_2 = U_{P_2}$ .

Ainsi on a éliminé la possibilité d'envoyer le voisinage de  $P_2$  directement sur  $P_1$  par des éléments de  $g$ . On va maintenant voir qu'en restreignant le voisinage de  $P_1$ , on peut effectuer la séparation.

Par propriété de l'action, on sait que  $\{g \in G, g(\overline{W_2} \cap U_{P_1})\}$  est fini. On peut donc numéroter ses éléments en  $\{g_1, g_2, \dots, g_l\}$ .  $\forall i \in \llbracket 1, \dots, l \rrbracket$ , on définit  $V_i = U_{P_1} \setminus g_i(\overline{W_2})$  qui est un voisinage ouvert de  $P_1$  tel que  $g_i(\overline{W_2}) \cap V_i = \emptyset$ .

On pose  $W_1 = \bigcap_{i=1}^l V_i$ , qui est ouvert en tant qu'intersection finie d'ouverts, et est donc un voisinage de  $P_1$ . Tel qu'on l'a construit, on sait que  $\forall g \in G, g(W_2) \cap W_1 = \emptyset$ . Autrement dit, aucun point de  $W_1$  n'est dans l'orbite d'un point de  $W_2$ . En prenant  $\pi(W_1)$  et  $\pi(W_2)$  (où  $\pi : M \rightarrow M/G$  est la projection canonique associée à l'action), on a donc séparé  $O_{P_1}$  et  $O_{P_2}$ .

On va maintenant munir le quotient d'un atlas. Naturellement, cet atlas sera "importé" depuis celui de  $M$ , en le regardant dans la famille  $(U_P)_{P \in M}$  définie avant. Plus précisément, si  $(\phi, W)$  est une carte de  $M$ , alors pour tout  $P \in M$  tel que  $U_P \cap W \neq \emptyset$ , on pose  $V_P = W \cap U_P$  et  $\phi_P : V_P \rightarrow \mathbb{C}$  la restriction de  $\phi$  à  $V_P$ .

On descend alors cette restriction sur le quotient en définissant  $\phi'_P = \phi_P \circ \pi|_{V_P}^{-1}$ . On sait que  $\pi|_{V_P}$  est biholomorphe car on s'est restreint à un ouvert où  $\pi$  est localement l'identité. Et donc les  $\phi'_P$  ainsi définies sont bien des cartes biholomorphes.

L'atlas dont on va munir  $M/G$  est donc  $\{(\phi'_P, \pi(V_P)) \mid \forall \phi \text{ carte de } M, \forall P \in M\}$ . On peut facilement voir que cet atlas recouvre entièrement  $M/G$ . Reste à vérifier que les changements de cartes de cet atlas sont bien biholomorphes.

Intéressons nous à deux types changements de cartes particuliers :

- **Les changements de cartes descendus de  $M$ .** Si  $(\phi_P, V_P)$  et  $(\psi_Q, V_Q)$  sont des cartes de  $M$  telles que  $V_P \cap V_Q \neq \emptyset$ , alors  $\phi_P \circ \psi_Q^{-1}$  est un changement de cartes de  $M$  et est donc biholomorphe. Comme  $\pi|_{V_P}$  et  $\pi|_{V_Q}$  sont également biholomorphes, le changement de cartes de  $M/G$   $\phi'_P \circ \psi'^{-1}_Q$  est biholomorphe.
- **Les translations par l'action du groupe.** Si on a un ouvert  $U$  de  $M/G$  tel que  $U = \pi(V_P) = \pi(V_Q)$  avec  $\pi(V_P) \neq \pi(V_Q)$ , et deux cartes  $\phi'_P : U \rightarrow \mathbb{C}$  et  $\phi'_Q : U \rightarrow \mathbb{C}$ , alors  $\phi'_P \circ \phi'^{-1}_Q$  est un changement de carte non-trivial de  $M/G$ . il s'agit en effet de la translation par un des éléments de  $G$ . ces éléments étant biholomorphes, on en déduit que ces changements de cartes le sont aussi

Or, tous les changements de cartes de  $M/G$  sont des composés de changements de cartes de ces deux types de base (On peut s'en convaincre aisément). Ainsi, les changements de cartes sont tous biholomorphes, et  $M/G$  est bien une surface de Riemann.  $\square$ .

**Remarque 5** *Ce résultat est en fait vrai pour des variétés complexes de dimension finie quelconque. On a pas utilisé dans la preuve de propriétés spécifiques à la dimension 1.*

**Remarque 6** *On retrouve immédiatement que les tores sont des surfaces de Riemann car il est facile de voir que l'action d'un réseau sur  $\mathbb{C}$  est libre et propre.*