

Théorie des groupes

Feuille d'exercices 10

23 Novembre 2015

Exercice 1 (Classification des groupes d'ordre 30) Nous allons montrer qu'il y a exactement 4 groupes d'ordre 30, qui sont : $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$, D_{15} , $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times D_5$ et $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times D_3$.

1. Centre du groupe diédral :

- (a) Soit $n \geq 3$. Pour i et $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, calculer les commutateurs suivants dans D_n : $[r^i, r^j]$, $[r^i, r^j s]$, $[r^i s, r^j s]$ et $[s, s]$.

Indication : On rappelle que $sr^k s = r^{-k}$ pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

- (b) En déduire que $Z(D_n) = \{e\}$ si n est impair, et $Z(D_n) = \{e, r^{n/2}\}$ si n est pair.

- (c) Déterminer le centre de chacun des 4 groupes ci-dessus et en déduire qu'ils ne sont pas isomorphes.

2. Une version alternative du théorème de produit direct :

Théorème : Soit G un groupe. Soient N et K deux sous-groupes de G tels que $N \subset N_G(K)$, $K \subset N_G(N)$, $N \cap K = \{e\}$ et $|N| \cdot |K| = |G|$. Alors G est isomorphe à $N \times K$.

- (a) Soit G un groupe et soient N et K deux sous-groupes de G tels que $N \cap K = \{e\}$. Montrer que

$$f : \begin{array}{ccc} N \times K & \rightarrow & NK \\ (n, k) & \mapsto & nk \end{array} \text{ est une bijection.}$$

- (b) Si de plus $N \subset N_G(K)$, $K \subset N_G(N)$, montrer que les éléments de N commutent avec ceux de K .

- (c) Prouver le théorème.

Remarque : Le théorème est donc vrai en particulier quand $K \triangleleft G$ et $N \triangleleft G$. (et on demande toujours que $N \cap K = \{e\}$ et $|N| \cdot |K| = |G|$).

3. Classification des groupes d'ordre 15 :

- (a) Soit G un groupe d'ordre 15. Compter le nombre de 3-Sylow et de 5-Sylow de G .

- (b) En déduire que G est forcément cyclique.

4. Retour à l'ordre 30 : Soit G un groupe d'ordre 30.

- (a) On note (respectivement) n_2, n_3 et n_5 le nombre de 2-Sylow, 3-Sylow et 5-Sylow de G . Quelles sont les valeurs possibles de n_2, n_3 et n_5 ?

- (b) Montrer qu'on a forcément $n_3 = 1$ OU $n_5 = 1$.

- (c) Montrer que dans les deux cas, G contient un sous-groupe d'ordre 15 qui est distingué.

Indication : Utiliser la question 2)a)

- (d) *Non nécessaire pour la suite :* En déduire que $n_3 = 1$ ET $n_5 = 1$.

Indication : Raisonner sur l'ordre des éléments

- (e) Montrer que $G \cong \mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

- (f) Décrire $\text{Aut}(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})$.

- (g) Décrire $\text{Hom}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \text{Aut}(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}))$.

- (h) Conclure sur la classification.

5. Bonus : Décrire à quel produit direct correspond chacun des groupes de la classification.

Exercice 2 (Formule de Burnside)

1. Soient X et Y deux ensembles. Soit $S \subset X \times Y$. On pose :

$$S(a, \bullet) = \{(x, y) \in S \mid x = a\} \quad S(\bullet, b) = \{(x, y) \in S \mid y = b\}$$

Vérifier que :

$$|S| = \sum_{a \in X} |S(a, \bullet)| = \sum_{b \in Y} |S(\bullet, b)|$$

2. Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini E . En notant t le nombre d'orbites de l'action, et Gx_i ces orbites (pour i de 1 à t), montrer que :

$$\sum_{g \in G} |Fix(g)| = \sum_{i=1}^t \sum_{x \in Gx_i} |Stab_G(x)|$$

3. En déduire la formule de Burnside :

$$\sum_{g \in G} |F(g)| = t |G|$$

4. **Application :** Combien y a-t-il de façons réellement différentes de faire un collier de 9 perles avec 4 perles bleues, 3 jaunes et 2 rouges ?