

Théorie des groupes

Feuille d'exercices 3

21 Septembre 2015

Exercice 1 Soit $(G_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de groupes. Le sous-ensemble du produit direct $\prod_{i \in I} G_i$ formé des éléments $(g_i)_{i \in I}$ ne comportant qu'un nombre fini de g_i différents de l'élément neutre est appelé **produit restreint** et on le note $\oplus_{i \in I} G_i$. Montrer que le produit restreint des groupes $(G_i)_{i \in I}$ est un sous-groupe du produit direct $\prod_{i \in I} G_i$ des groupes $(G_i)_{i \in I}$.

Exercice 2 Caractériser les groupes dont l'ensemble des sous-groupes est fini.

Exercice 3 Soient deux groupes G_1 et G_2 .

1. Montrer que $G_1 \times G_2$ et $G_2 \times G_1$ sont isomorphes.
2. Si H_1 et H_2 sont respectivement des sous-groupes de G_1 et G_2 , montrer que $H_1 \times H_2$ est un sous-groupe de $G_1 \times G_2$.
3. Réciproquement, tous les sous-groupes de $G_1 \times G_2$ sont-ils de la forme $H_1 \times H_2$?

Exercice 4 Soit H_1 et H_2 deux sous-groupes non-triviaux (i.e. différents de $\{e\}$ et du groupe tout entier) de \mathfrak{S}_3 . Le produit direct $H_1 \times H_2$ peut-il être isomorphe à \mathfrak{S}_3 ?

Exercice 5 (Classification des groupes d'ordre 4)

Montrer qu'un groupe d'ordre 4 est soit isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ soit isomorphe au groupe de Klein $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
Indication: Regarder les éléments d'ordre 4.

Exercice 6 (Représentation linéaires de groupes)

Pour un groupe G , un entier $n \in \mathbb{N}$ et un corps K , on appelle *représentation de matricielle de G de degré n sur K* tout morphisme $\rho \in \text{Hom}(G, \text{GL}(n, K))$. Si de plus ρ est injective, la représentation est dite *fidèle*.

1. Montrer que le groupe symétrique S_3 admet une représentation fidèle de degré 3 sur \mathbb{Q} et une de degré 2 sur \mathbb{R} . (Indication: Penser au groupes des isométries d'un triangle équilatéral).
2. Montrer que \mathbb{C}^* admet une représentation fidèle de degré 2 sur \mathbb{R} .
3. Montrer que tout groupe fini de cardinal n admet une représentation fidèle de degré n sur \mathbb{Q} .

Exercice 7 Soient G_1 et G_2 deux groupes. Montrer que:

1. $G_1 \simeq G_2 \Rightarrow \text{Aut}(G_1) \simeq \text{Aut}(G_2)$.
2. $G_1 \simeq G_2 \Rightarrow \text{Int}(G_1) \simeq \text{Int}(G_2)$.

Exercice 8 (Homographies de la sphère de Riemann) On se place dans $\mathbb{P} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

A toute famille $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ vérifiant $ad - bc \neq 0$, on associe l'application définie sur \mathbb{P} $f : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, avec, lorsque $c \neq 0$, $f(-\frac{d}{c}) = \infty$ et $f(\infty) = \frac{a}{c}$, et $f(\infty) = \infty$ quand $c = 0$. Une telle application est appelée une *homographie* et l'ensemble des homographies est noté \mathcal{H} .

1. Montrer que toute homographie f est une permutation de \mathbb{P} .
2. Montrer que H l'ensemble des homographies de \mathbb{P} est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_{\mathbb{P}}$.
3. Montrer que $\{f_1 : z \mapsto z, f_2 : z \mapsto -z, f_3 : z \mapsto \frac{1}{z}, f_4 : z \mapsto -\frac{1}{z}\}$ forme un sous-groupe de H isomorphe au groupe de Klein.

4. Soit $\varphi : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C}) \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \right) \in \mathcal{H}$. Montrer que φ est un morphisme, déterminer $\ker(\varphi)$ et $\text{im}(\varphi)$.