

Théorie des groupes

Feuille d'exercices 4

28 Septembre 2015

Exercice 1 Soit G un groupe fini et n entier premier avec $|G|$.

Montrer que $\Phi : g \mapsto g^n$ est une permutation de G .

Exercice 2 Pour $n \geq 1$, on note Γ_n l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité dans \mathbb{C} .

1. Montrer que pour $n, m \geq 1$, on a $\Gamma_n \cap \Gamma_m = \Gamma_{\text{pgcd}(n,m)}$
2. Calculer $\text{pgcd}(X^n - 1, X^m - 1)$ dans $\mathbb{C}[X]$. Et dans $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 3 Soit G un groupe non réduit à $\{e\}$. Montrer que

G d'ordre p premier $\Leftrightarrow G$ admet uniquement G et $\{e\}$ comme sous-groupe

Exercice 4 (Groupes abéliens d'ordre pq) Soient p et q deux nombres premiers distincts. Montrer que tout groupe abélien d'ordre pq est cyclique.

Exercice 5 Soit G un groupe, g et h des éléments de G d'ordres finis. L'ordre de gh est-il fini ?

Exercice 6 Déterminer $\text{Aut}(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$.

Exercice 7 Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe G . On suppose que $[G : K]$ fini.

1. Montrer que $[H : H \cap K] \leq [G : K]$, et donc que $[H : H \cap K]$ est fini.
2. Si $G = HK$, montrer que l'on a égalité dans la question précédente.
3. On suppose en plus que $[G : H]$ est fini (et toujours $G = HK$). Montrer qu'alors

$$[G : H \cap K] = [G : H][G : K].$$

Exercice 8 (Sous-groupes de type fini)

Un groupe est dit de **type fini** si il est engendré par un nombre fini d'éléments.

Soit G un tel groupe et H un groupe d'indice fini dans G . Montrons que H est également de type fini.

On note $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une famille engendrant G et pour simplifier, on notera $x_{i+n} = x_i^{-1}$ et peut considérer que $G = \langle x_1, x_2, \dots, x_{2n} \rangle$.

1. On note $G = \cup_{1 \leq j \leq m} H g_j$ où $\{g_j\}$ est une famille de représentants des classes à droite de G modulo H (avec $g_1 = e$). Montrer que pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, 2n \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket$, il existe un unique $h_{ij} \in H$ et un unique k tel que $g_j x_i = h_{ij} g_k$.
2. En déduire que H est de type fini engendré par les $\{h_{ij} | 1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq m\}$.

Exercice 9 (Groupe diédral infini)

On se place dans \mathbb{R} espace affine euclidien, et on note $\mathcal{I}(\mathbb{R})$ l'ensemble des isométries de \mathbb{R} .

On note $G = \{\varphi \in \mathcal{I}(\mathbb{R}); \varphi(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\}$.

1. En posant $\tau : x \mapsto x + 1$ et $\sigma : x \mapsto -x$. Montrer que $G = \{\tau^n, \tau^n \circ \sigma; n \in \mathbb{Z}\}$.
2. En déduire que G est un sous-groupe de $\mathcal{I}(\mathbb{R})$.

Ce groupe est appelé le groupe diédral infini et est généralement noté D_∞ .

3. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, D_∞ est isomorphe au sous-groupe de $\mathcal{I}(\mathbb{C})$ engendré par la symétrie $s : x \mapsto \bar{x}$ et la rotation r de centre 0 et d'angle $2\pi\alpha$.