

Théorie des groupes

Feuille d'exercices 5

4 Octobre 2015

Exercice 1 Soient G un groupe et $H \triangleleft G$ d'indice fini n . Montrer que pour tout $g \in G$, $g^n \in H$.

Exercice 2

1. Soit G un groupe. Montrer que tout sous-groupe H d'indice 2 dans G est distingué.
2. Soit $n \geq 2$. Montrer que le seul sous-groupe de S_n d'indice 2 est A_n .
Indication : S'intéresser à $\pi : S_n \rightarrow S_n/H$.

Exercice 3 Soit G et H deux groupes, $\phi : G \rightarrow H$ un morphisme.

1. Rappelons que $\ker(\phi)$ est toujours distingué, qu'en est-il de $\text{Im}(\phi)$?
2. L'image d'un sous-groupe distingué est-elle distinguée ? l'image réciproque ?
3. $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ est-il distingué dans $\text{GL}_n(\mathbb{R})$? $\text{O}_n(\mathbb{R})$ dans $\text{GL}_n(\mathbb{R})$? $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ dans $\text{O}_n(\mathbb{R})$? Dans les cas distingués, préciser ce que sont les quotients.

Exercice 4 (Sous-groupes caractéristiques) Soit G un groupe. Un sous-groupe H de G est dit *caractéristique* si pour tout $\alpha \in \text{Aut}(G)$, on a $\alpha(H) = H$. Cela est noté $H \triangleleft G$.

1. Montrer que $H \triangleleft G$ implique $H \triangleleft G$.
2. Montrer que $K \triangleleft H \triangleleft G$ implique $K \triangleleft G$.
3. Montrer que $K \triangleleft H \triangleleft G$ implique $K \triangleleft G$.
4. On appelle groupe dérivé de G , noté $D(G)$, le groupe engendré par les commutateurs de G . C'est à dire $D(G) = \langle \{xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in G\} \rangle$. Montrer que le groupe dérivé est caractéristique.

Exercice 5 On définit les deux sous-groupes de S_4 :

$$H = \{e, (12)(34)\}$$

$$K = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

Montrer que $H \triangleleft K$ et $K \triangleleft S_4$, mais que $H \not\triangleleft S_4$.

Exercice 6 (Sous-groupes maximaux) Soit G un groupe non-réduit à $\{e\}$.

Si H est un sous-groupe de G , H est dit maximal si : $H < K < G \Rightarrow K = H$ ou $K = G$.

1. Montrer que les sous-groupes maximaux de \mathbb{Z} sont les $p\mathbb{Z}$ avec p premier.
2. Montrer que si G est fini, G possède des sous-groupes maximaux et que tout sous-groupe est inclus dans un sous-groupe maximal.
3. Soit H distingué dans G . Montrer que H maximal $\Leftrightarrow \frac{G}{H}$ cyclique d'ordre premier.

Exercice 7 (Automorphismes de $(\mathbb{F}_p)^n$) Soit p un entier premier. On note \mathbb{F}_p le corps de cardinal p . (On rappelle que ce corps est unique (à isomorphisme de corps près) et est $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$)

1. **Cas $n=1$** : Montrer que le groupe $\text{Aut}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est isomorphe à $(\mathbb{F}_p^\times, \times)$.
2. Montrer que tout endomorphisme de groupe de \mathbb{F}_p^n est une application \mathbb{F}_p -linéaire.
3. Montrer qu'il y a $(p^n - 1)(p^n - p) \dots (p^n - p^{n-1})$ bases de $(\mathbb{F}_p)^n$.
4. Dédire de ce qui précède le nombre d'automorphismes de groupes de $(\mathbb{F}_p)^n$

Exercice 8 Parmi A_1, A_2, A_3, A_4 , lesquels sont simples ?

Exercice 9 (Groupe des quaternions)

On va construire un groupe non-abélien dont tous les sous-groupes sont distingués.

Soit les éléments de $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ suivants :

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Nous notons 1 la matrice identité de $\text{GL}(2, \mathbb{C})$.

1. Montrer que : $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -1$.
2. En déduire que $\{\text{id} = 1, -\text{id} = -1, I, -I, J, -J, K, -K\}$ est le groupe d'ordre 8 engendré par I, J et K . Vérifier qu'il n'est pas abélien.
Ce groupe est appelé **groupe des quaternions** et on le note Q_8 .
3. Montrer que tous les sous-groupes de Q_8 sont distingués.