

Théorie des groupes

Feuille d'exercices 7

19 Octobre 2015

Exercice 1 On note $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer sa décomposition canonique en produit de cycles disjoints, son ordre, sa signature, une décomposition en produit de transpositions ainsi que σ^{100} .

Exercice 2 Combien y a-t-il d'éléments d'ordre 14 dans \mathfrak{S}_{10} ?

Exercice 3 (Quelques ensembles générateurs)

Soit $n \geq 3$. On rappelle que :

— $\mathfrak{S}_n = \langle \{(1i), i \in \llbracket 2, n \rrbracket\} \rangle$

— $\mathfrak{S}_n = \langle \{(i, i+1), i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket\} \rangle$

1. Soit $\gamma = (j_1 j_2 \dots j_r)$ un r -cycle de \mathfrak{S}_n (avec $r \geq 3$ et $n \geq 3$). Montrer que pour toute permutation σ de \mathfrak{S}_n , la permutation $\sigma\gamma\sigma^{-1}$ est le r -cycle $(\sigma(j_1), \sigma(j_2) \dots \sigma(j_r))$.

2. On note $\tau = (12)$ et $\rho_1 = (1, 2, 3, \dots, n)$ la permutation circulaire de \mathfrak{S}_n . Montrer que $\mathfrak{S}_n = \langle \tau, \rho_1 \rangle$.

Indication : Utiliser la question précédente.

3. On note $\rho_2 = (2, 3, \dots, n)$. Montrer que $\mathfrak{S}_n = \langle \tau, \rho_2 \rangle$.

4. Montrer que pour $n \geq 3$, le groupe \mathfrak{A}_n est engendré par les 3-cycles.

Indication : On peut en fait montrer qu'il est engendré par les $(1, i, j)$ avec $1, i$ et j distincts dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Exercice 4 (Une application combinatoire) On souhaite asseoir n convives autour d'une table ronde (avec $n \geq 3$). On considère que deux manières d'asseoir les n personnes sont identiques si tous les convives ont les deux mêmes voisins (sans tenir compte de voisin à gauche ou à droite). Combien y a-t-il de manières réellement différentes d'asseoir les n convives ?

Exercice 5 Soit $n \geq 2$. Montrer que D_n est isomorphe à un produit semi-direct de la forme $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ où $\varphi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est un morphisme que l'on précisera.

Exercice 6 (Classification des groupes d'ordre $2p$, p premier)

Commençons par montrer :

Proposition 1 :

Soit $n \geq 2$ et G un groupe engendré par deux éléments a et b tels que $o(a) = n$; $o(b) = 2$; $o(ab) = 2$.

Alors G est isomorphe au groupe diédral D_n .

On prend G un tel groupe

1. Montrer que $G = \{e, a, \dots, a^{n-1}, b, ab, \dots, a^{n-1}b\}$ et est donc d'ordre $2n$.

2. Vérifier que G et D_n ont la même table de multiplication, et sont donc isomorphes. Ce qui montre la proposition

3. Soit G un groupe d'ordre $2p$. Nous cherchons une classification de ces groupes.

(a) Que se passe-t-il si G contient un élément d'ordre $2p$?

(b) Montrer que le cas où tous les éléments de G sont d'ordre 2 n'est possible que pour $p = 2$.

(c) Si l'on est pas dans les cas précédents, on note x un élément d'ordre p . Exhiber y d'ordre 2.

(d) En étudiant l'automorphisme $\varphi : \begin{matrix} \langle x \rangle & \rightarrow & \langle x \rangle \\ z & \mapsto & yzy \end{matrix}$, montrer que xy est d'ordre 2 et en déduire que G est isomorphe à D_p .

(e) Conclure sur la classification.

Exercice 7 (Le groupe des quaternions, et les groupes non abéliens d'ordre 8)

Dans $GL_2(\mathbb{C})$, on définit les trois matrices :

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

— Rappelons que $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -1$.

— Le groupe $\langle \{I, J, K\} \rangle$ est un groupe d'ordre 8 et est en fait l'ensemble $\{\pm Id, \pm I, \pm J, \pm K\}$. **Ce groupe est appelé groupe des quaternions et est (souvent) noté \mathcal{Q}_8 ou \mathbb{H}_8 .**

(Ces résultats faisaient l'objet de l'exercice 9 de la feuille 5)

L'objectif est de montrer qu'il n'existe (à isomorphisme près) que deux groupes non-abéliens d'ordre 8 : D_4 et \mathcal{Q}_8 .

1. Soit G un groupe d'ordre 8 non abélien quelconque. Montrer que G contient un élément i d'ordre 4 qui engendre un sous-groupe distingué $N \triangleleft G$.

On va maintenant distinguer deux cas :

2. Si $G \setminus N$ contient au moins un élément d'ordre 2, montrer que G est isomorphe à D_4 .

Indication : Utiliser la proposition de l'exercice 6.

3. Sinon, tous les éléments de $G \setminus N$ sont d'ordre 4. On pose j un élément de $G \setminus N$, et on note $k = ij$ et $-1 = i^2$. Vérifier que -1 commute avec tout le groupe, et retrouver la relation de la question 1)a). En déduire qu'il n'y a qu'une seule table de multiplication possible.

4. Conclure.

Exercice 8

1. Soit G un graphe connexe à n sommets. Montrer que G a au moins $n - 1$ arêtes.
2. En déduire que le nombre minimal de transpositions nécessaires pour engendrer S_n est $n - 1$.