

Théorie des groupes

Feuille d'exercices 9

16 Novembre 2015

Rappels sur les p -Sylow Soit G un groupe fini et p divisant l'ordre de G . $|G| = p^n s$ où p ne divise pas s .
Un p -Sylow est un p -sous-groupe de G maximal pour l'inclusion. Alors

- Il existe au moins un p -Sylow dans G d'ordre p^n .
- Tous les sous-groupes d'ordre p^n sont des p -Sylow.
- Tous les p -Sylow sont conjugués entre eux dans G .
- Tous les p -Sylow sont isomorphes.
- Il y a un unique p -Sylow si et seulement si il est distingué.
- Si on note n_p le nombre de p -Sylow, alors:

$$n_p \mid s \qquad n_p \equiv 1 \pmod{p}$$

Exercice 1 Soit G un groupe d'ordre 200. Montrer que G n'est pas simple.

Exercice 2 Soient $p < q$ deux nombres premiers. Soit G d'ordre pq .

1. Montrer que G a un unique q -Sylow.
2. En déduire que $G \cong \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
3. Montrer que si p ne divise pas $q - 1$, alors G est abélien.

Exercice 3 (Théorème de Wilson) Soit p premier.

1. Montrer qu'un élément de \mathfrak{S}_p est d'ordre p si et seulement si c'est un p -cycle.
2. Combien y a-t-il de p -Sylow dans \mathfrak{S}_p ?
3. En déduire que $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Exercice 4 Soit G un groupe d'ordre 175. Ecrire G comme produit de deux de ses sous-groupes de Sylow. En utilisant que les groupes d'ordre p^2 sont abéliens, en déduire que G est abélien.

Exercice 5 Soit G un groupe d'ordre pqr avec p, q , et r trois premiers distincts. On supposera que $p > q > r$. On note n_k le nombre de k -sous-groupes de Sylow de G pour k premier.

1. Montrer que:

$$pqr \geq n_p(p - 1) + n_q(q - 1) + n_r(r - 1) + 1$$

Indication: Compter les éléments selon leur ordre

2. Montrer que si l'on suppose $n_p > 1$ ET $n_q > 1$ ET $n_r > 1$, alors on a:

$$n_p = qr, \quad n_q \geq p, \quad n_r \geq q$$

3. En déduire que G n'est pas simple.

Exercice 6 (Groupe libre)

1. Soit G un groupe agissant sur un ensemble E . Supposons qu'il existe deux ensembles disjoints non-vides E_1 et E_2 dans E et deux éléments g et h dans G tels que:

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*, \quad g^k(E_1) \subset E_2, \quad h^k(E_2) \subset E_1$$

On note A l'ensemble des mots en g, h, g^{-1} et h^{-1} .

Un mot de A est dit réduit si l'on a effectué toutes les simplifications du type $g.g^{-1} = e$. possibles. Par exemple, $ghg^{-1}h^4g^{-1}$ est réduit, mais pas $ghgg^{-1}h$, qui lui est égal au mot réduit gh^2 . on note Σ l'ensemble des mots réduits.

Montrer qu'aucun mot non-trivial de Σ n'est égal à l'élément neutre. C'est à dire que $\langle g, h \rangle = \Sigma$. On dit alors que $\langle g, h \rangle$ est **libre**.

2. Montrer que Γ le sous-groupe de $SL(2, \mathbb{Z})$ engendré par $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est libre.

Indication: Faire agir Γ sur \mathbb{R}^2

Exercice 7 (Simplicité de \mathfrak{A}_5 ...)

1. Montrer que les 3-cycles sont tous conjugués deux à deux dans \mathfrak{A}_5 .
2. Montrer que les doubles transpositions sont toutes conjuguées deux à deux dans \mathfrak{A}_5 .
3. Soient σ et γ deux 5-cycles. Montrer que les groupes $\langle \sigma \rangle$ et $\langle \gamma \rangle$ sont conjugués.
4. Soit H un sous-groupe distingué dans \mathfrak{A}_5 . Montrer que si H contient un élément d'un type, il contient tous les éléments du même type
5. Compter le nombre d'éléments de chaque classe de conjugaison et en déduire que \mathfrak{A}_5 est simple.

Exercice 8 (...qui est d'ailleurs le seul groupe simple d'ordre 60) Soit G un groupe simple d'ordre 60.

1. (a) Montrer que G admet 6 5-Sylow. On note S_5 l'ensemble des 5-Sylow de G .
(b) On fait agir G par conjugaison sur l'ensemble de ses 5-Sylow. En déduire un morphisme $\alpha : G \rightarrow \mathfrak{S}_6$ et montrer qu'il est injectif.
(c) G est donc isomorphe à un sous-groupe de \mathfrak{S}_6 . Montrer qu'en fait, il est isomorphe à un sous-groupe de \mathfrak{A}_6 . On note alors $H = \alpha(G) \subset \mathfrak{A}_6$.
Indication: Que peut-être $\alpha^{-1}(\mathfrak{A}_6)$?
2. (a) Quel est le cardinal de l'ensemble des classes à gauche \mathfrak{A}_6/H ?
(b) On fait agir \mathfrak{A}_6 par translation à gauche sur cette ensemble. Montrer que cette action fournit un isomorphisme $\phi : \mathfrak{A}_6 \rightarrow \mathfrak{A}_6$.
Indication: Admettre \mathfrak{A}_6 est simple et s'inspirer de la méthode de la première question.
(c) Montrer que $\phi(H) = \text{Stab}_{\mathfrak{A}_6}(H)$.
(d) En déduire que $\phi(H)$ est isomorphe à \mathfrak{A}_5 .
(e) Conclure