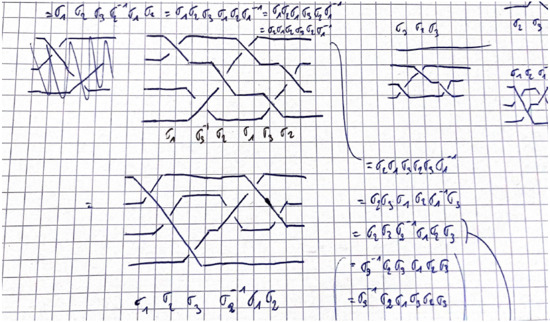
Introduction au calcul des tresses

Baptiste Dugué

Février 2025



Sommaire

Problème d'isotopie des tresses

À la base, une tresse est un objet topologique. Il s'agit d'un ensemble de brins aux extrémités fixées qui se croisent.

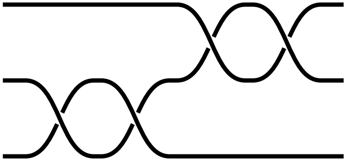


Figure: Un exemple de tresse à 3 brins.

Problème d'isotopie des tresses

Une question naturelle : étant données deux tresses, peut-on passer de l'une à l'autre en jouant avec les brins ? Lorsque c'est possible, on dit que les tresses sont **isotopes**.

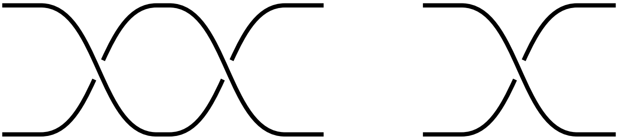


Figure: Ces tresses ne sont clairement pas isotopes...

Problème d'isotopie des tresses

Une question naturelle : étant données deux tresses, peut-on passer de l'une à l'autre en jouant avec les brins ? Lorsque c'est possible, on dit que les tresses sont **isotopes**.

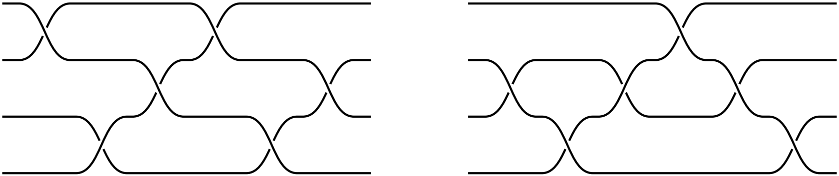
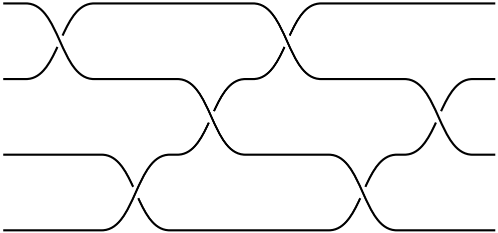


Figure: Ces tresses sont-elles isotopes ? C'est plus dur à dire...

Les groupes B_n

Pour résoudre le problème d'isotopie des tresses, on passe de la topologie à l'algèbre en associant à une tresse un **mot** qui encode les croisements entre les brins.



Par exemple, le mot associé à cette tresse sera $\sigma_1\sigma_3^{-1}\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2$.

Les groupes B_n

On se convainc facilement que les tresses suivantes sont isotopes, donc sont la même à déformation près. On a donc envie que les mots de tresses associés soient "les mêmes".

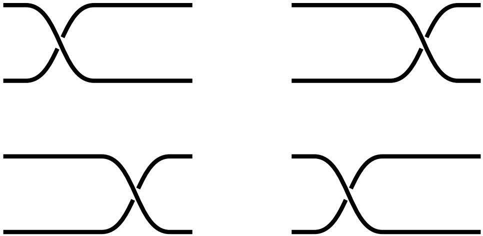


Figure: $\sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1$

On se convainc facilement que les tresses suivantes sont isotopes, donc sont la même à déformation près. On a donc envie que les mots de tresses associés soient "les mêmes".

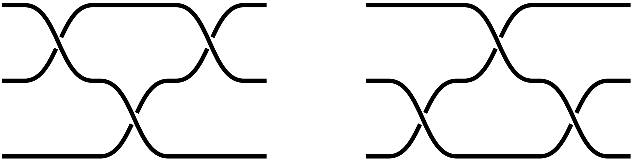


Figure: $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$

Les groupes B_n

Groupes de tresses

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, le *groupe de tresses à n brins* est le groupe (muni de la loi $\cdot$ de concaténation) admettant la présentation

$$B_n := \left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{si } |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{si } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle$$

.

Résoudre le problème d'isotopie des tresses, c'est la même chose que résoudre le problème du mot dans les groupes B_n. Pour ce faire, on va chercher à construire une forme normale sur B_n.

Le monoïde des tresses positives B_n^+

Pour commencer, il est plus simple de travailler sur le **monoïde des tresses positives** que l'on peut voir comme l'ensemble des tresses dont tous les croisements se font en faisant passer par dessus le brin le plus haut, ou autrement dit les tresses représentées par un mot dont toutes les lettres sont positives. Formellement :

Monoïde des tresses positives

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, le **monoïde de tresses positives à** n **brins** est le monoïde présenté

$$B_n := \left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{si } |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{si } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle^+$$

.

Le monoïde des tresses positives B_n^+

Il se trouve que B_n est le groupe des fractions de B_n^+, mais ce n'est pas un résultat immédiat même s'il est intuitif. Pour le démontrer on utilise le

Théorème de Ore

Si M est un monoïde de présentation $\langle S|R\rangle^+$ qui est **simplifiable** et tel que deux éléments quelconques de M admettent toujours un multiple (à droite) commun, alors M se plonge via une application ι dans le groupe $G = \langle S|R\rangle$, qui est son groupe de fractions : Pour tout élément $g \in G$, il existe $a, b \in M$ tels que $g = \iota(a)\iota(b)^{-1}$.

Monoïde simplifiable

Un monoïde M est dit **simplifiable à gauche (resp. à droite)** si pour tout $a, b, c \in M$, $ab = ac$ (resp. $ba = ca$) implique $b = c$.
Un monoïde **simplifiable** est un monoïde simplifiable à gauche et à droite.

Le monoïde des tresses positives B_n^+

Pour montrer que B_n^+ est simplifiable, on introduit les grilles de retournement (voir *Le calcul des tresses - Patrick Dehornoy* pour plus de détails).
Pour l'existence d'un multiple commun, on introduit la **tresse fondamentale**, définie de manière récursive.

Tresse fondamentale

On pose $\Delta_1 := \epsilon$ puis, pour tout $n \geq 2$, $\Delta_n := \sigma_1 \sigma_2 ... \sigma_{n-1} \Delta_{n-1}$.

Par exemple, $\Delta_4 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1$.

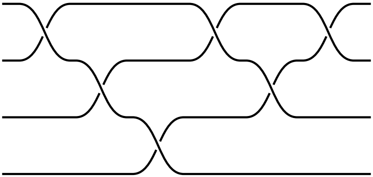


Figure: La tresse Δ_4

La tresse fondamentale

La tresse fondamentale (pour un groupe B_n ou un monoïde B_n^+, il s'agit donc de la tresse Δ_n) a plusieurs bonnes propriétés, notamment:

Proposition

L'élément Δ_n^l est multiple à droite de tout élément de B_n^+ de longueur inférieure à l, c'est-à-dire décrit par un mot $\sigma_{i_1}...\sigma_{i_k}$ avec $k \leq l$.

Proposition

Le centre du groupe B_n est $Z(B_n) = \{\Delta_n^{2k} | k \in \mathbb{N}\}$.

La tresse fondamentale

La proposition sur le centre de B_n se déduit en fait du fait remarquable suivant :

Automorphismes *flips*

L'**automorphisme flip** sur B_n est défini par, pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\tau_n(\sigma_i) = \sigma_{n-i}$.

Proposition

Pour tout n, τ_n est l'automorphisme de conjugaison associé à Δ_n. Concrètement, pour toute tresse $a \in B_n$, $a\Delta_n = \Delta_n \tau_n(a)$.

La tresse fondamentale

Le fait que B_n soit le groupe de fractions de B_n^+ permet d'écrire toute tresse g comme un produit ab^{-1} avec $a, b \in B_n^+$.

À partir de là, on sent bien que construire une forme normale sur le monoïde va permettre relativement facilement d'en déduire une forme normale sur le groupe B_n.

Pour ce faire, on repart encore de la tresse fondamentale.

La tresse fondamentale

Tresses simples

Une tresse $a \in B_n^+$ est dite **simple** si elle divise la tresse fondamentale Δ_n.

Tête d'une tresse

Soit $a \in B_n^+$ une tresse positive. La **tête** de a est la tresse $T(a) :=\text{pgcd}_{gauche}(a, \Delta_n)$.

Suite normale

Une suite $(s_1, ..., s_d)$ de tresses simples est dite normale si pour tout $k \leq d$, $s_k = T(s_k ... s_d)$.

La tresse fondamentale

Proposition

Pour toute tresse positive $a \in B_n^+$, il existe une unique suite normale $(s_1, ..., s_d)$ telle que $a = s_1 ... s_d$ et $s_d \neq 1$, où 1 désigne la tresse triviale représentée par le mot vide ϵ.

Forme normale gloutonne

Soit $a \in B_n^+$ une tresse positive. La **forme normale gloutonne** de a est la suite normale $(s_1, ..., s_d)$ telle que $a = s_1 ... s_d$ et $s_d \neq 1$.

Remarque : Le calcul de la forme normale gloutonne d'une tresse positive de longueur l s'effectue en $O(l^2)$ étapes.

Forme Δ-normale

Pour finir d'apporter une réponse au problème d'isotopie, on construit une forme normale sur B_n en partant de la forme normale gloutonne.

Proposition

Toute tresse $g \in B_n$ s'écrit de manière unique $g = \Delta_n^m s_1 ... s_d$ avec $m \in \mathbb{Z}$ et $(s_1, ..., s_d)$ une suite normale telle que $s_1 \neq \Delta_n$ et $s_d \neq 1$.

Forme Δ-normale

L'écriture unique précédente est appelée **forme Δ_n-normale** de g. On écrira $(\Delta_n^m \mid s_1, ..., s_d)$ pour parler d'une telle forme normale.
La plupart du temps, lorsqu'il n'y aura aucun risque d'ambiguïté, on omettra l'indice n et on parlera plus simplement de **forme Δ-normale**.

Remarque : Le calcul d'une forme Δ-normale pour une tresse de longueur l s'effectue encore en $O(l^2)$ étapes.

Le problème de conjugaison

Un autre problème classique pour les groupes présentés est de déterminer si deux mots correspondent à des éléments conjugués (on notera dans ce cas $g \simeq g'$). La forme Δ-normale permet encore de résoudre ce problème.

Idée de la méthode : réduire le problème en ne considérant que certaines conjugaisons de plus en plus spécifiques, jusqu'à arriver à un niveau de précision qui permette de déterminer si deux tresses sont conjuguées en calculant explicitement un sous-ensemble fini (mais potentiellement très gros) de la classe de conjugaison d'une tresse.

Premier exemple facile et représentatif :

Lemme

Si deux tresses sont conjuguées, alors elles sont conjuguées via une tresse positive.

Le problème de conjugaison

Partant de là, on va exploiter la forme normale pour introduire les fameux sous-ensembles des classes de conjugaison.

Borne inférieure, borne supérieure

Soit g une tresse de forme Δ-normale $(\Delta^m \mid s_1, ..., s_d)$. On appelle **borne inférieure de g** l'entier $\inf_n(g) := m$, **borne supérieure de g** l'entier $\sup_n(g) := m + d$, et **longueur canonique de g** l'entier $\mathrm{lc}_n(g) := d$.

Proposition

Pour toute tresse $g \in B_n$, on a pour tous p,q entiers :

- (i) $p \leq \inf(g) \Leftrightarrow \Delta^p \preccurlyeq g$,
- (ii) $\sup(g) \leq q \Leftrightarrow g \preccurlyeq \Delta^q$.

Intervalle $[p, q]_n$

Pour tous entiers $p, q \in \mathbb{Z}$ avec $p \leq q$, on appellera **intervalle** $[p, q]_n$ le sous ensemble de B_n : $[p, q]_n := \{g \in B_n — \Delta_n^p \preccurlyeq g \preccurlyeq \Delta_n^q\}$.

Pour passer d'une tresse g à une tresse conjuguée g', on peut donc toujours le faire via une tresse positive c, qui peut donc s'écrire sous forme normale gloutonne : $c = s_1 \dots s_d$.

On peut encore découper le problème en conjuguant successivement par les tresses simples s_d, puis s_{d-1},..., jusqu'à s_1. Quand on fait cela, on contrôle bien l'évolution des bornes des tresses successives :

Proposition

Si deux tresses g et g' sont conjuguées dans B_n, alors elles le sont dans l'intervalle $[p, q]_n$, où $p :=$min(inf(g),inf(g')) et $q :=$max(sup(g),sup(g')).

Le problème de conjugaison

Rétrospectivement, pour savoir s'il existe un chemin reliant une tresse g à une tresse g', il suffit de regarder l'ensemble des tresses conjuguées à g qui restent dans un intervalle $[p, q]$ bien choisi.

Intervalles de conjugaison

Soient g et g' deux tresses, et notons

- $p :=$min(inf(g),inf(g')),
- $q :=$max(sup(g),sup(g')).

On note alors $\mathrm{Conj}_{p,q}(g) := \{h \in [p, q] \mid h \simeq g\}$.

Proposition

Avec les notations précédentes, on a

$$g \simeq g' \Leftrightarrow g' \in \mathrm{Conj}_{p,q}(g).$$

Le problème de conjugaison

On a répondu au problème de conjugaison !

Étant données deux tresses g et g', l'intervalle de conjugaison associé $\mathrm{Conj}_{p,q}(g)$ est fini, et on peut le construire exhaustivement en considérant successivement tous les conjugués de g par une tresse simple, puis par deux tresses simples, et ainsi de suite en ne gardant à chaque fois que les tresses qui vérifient les conditions sur les bornes de l'intervalle, jusqu'à ce qu'on n'ajoute plus de nouveaux éléments.

Problème : Les intervalles de conjugaison sont finis, mais **très** gros. (À titre indicatif, la taille de l'intervalle $[-3, 3]$ est 234 dans B_3^+, 45.252 dans B_4^+, de l'ordre de 29 millions dans B_5^+ et environ $49 \cdot 10^9$ dans B_6^+.)

Il faut donc encore affiner la méthode pour obtenir un algorithme exploitable.

L'ensemble super-sommital

On introduit un sous-ensemble de l'intervalle de conjugaison qui va se trouver être un invariant de conjugaison total, le **super summit set**, ou **SSS**.

Ensemble super-sommital, ou SSS

Soit g une tresse dans B_n. Posons $\inf^{\simeq}(g) := \max\{\inf(g') \mid g' \simeq g\}$ et $\sup^{\simeq}(g) := \min\{\sup(g') \mid g' \simeq g\}$. L'**ensemble super-sommital de g** est alors l'ensemble des tresses conjuguées à g appartenant à l'intervalle $[\inf^{\simeq}(g), \sup^{\simeq}(g)]$:

$$SSS(g) := \{g' \in [\inf^{\simeq}(g), \sup^{\simeq}(g)] \mid g' \simeq g\}.$$

L'ensemble super-sommital

Non seulement le SSS n'est jamais vide, mais en plus on sait le construire grâce à des opérations de cyclage/décyclage.

Cyclage et décyclage

Soit $g \in B_n$ une tresse de forme Δ-normale $(\Delta^m \mid s_1, ..., s_d)$. Le **cyclage** et le **décyclage** de g sont alors définis comme

$$\mathrm{cycl}(g) := \Delta^m s_2 ... s_d \tau^m(s_1),$$

$$\mathrm{decycl}(g) := \Delta^m \tau^m(s_d) s_1 ... s_{d-1}.$$

Le cyclage et le décyclage se réalisent en fait comme des conjugaisons :

$$\mathrm{cycl}(g) = \tau^{-m}(s_1) g \tau^m(s_1)$$

$$\text{et } \mathrm{decycl}(g) = s_d g s_d^{-1}.$$

L'ensemble super-sommital

Encore une fois, on a un bon contrôle sur l'effet des (dé)cyclages sur les bornes. En fait, on dispose d'un résultat qui dit essentiellement "en cyclant et décyclant assez longtemps, on finira toujours par trouver une tresse dans le SSS".

Théorème

Soit $g \in B_n$. S'il existe au moins une tresse g' conjuguée à g telle que $\inf(g') > \inf(g)$ (resp. $\sup(g') < \sup(g)$), alors il existe un entier p tel que $\inf(\mathrm{cycl}^p(g)) > \inf(g)$ (resp. $\sup(\mathrm{decycl}^p(g)) < \sup(g)$).

L'ensemble super-sommital

La méthode pour déterminer si g et g' sont conjuguées est donc:

- Cycler g jusqu'à atteindre une tresse g_1 telle que $\inf(g_1) = \inf^{\simeq}(g)$.
- Décycler g_1 jusqu'à atteindre une tresse g_2 telle que $\sup(g_2) = \sup^{\simeq}(g)$.
  En particulier, $g_2 \in \mathrm{SSS}(g)$.
- Construire $\mathrm{SSS}(g)$ en le saturant par des conjugaisons de g_2 par des tresses simples (comme pour construire $\mathrm{Conj}_{p,q}(g)$).
- Construire de même un élément $g_2' \in \mathrm{SSS}(g')$.
- Vérifer si $g_2' \in \mathrm{SSS}(g)$. Si oui, alors g et g' sont conjuguées, sinon elles ne le sont pas.

Bornes sur le nombre de (dé)cyclages

Reste une question : qu'est-ce que ça veut dire "(dé)cycler assez longtemps" ? Comment sait-on si on doit continuer de cycler pour atteindre une borne optimale ou si on a déjà un bon candidat ?

Avec des arguments techniques, on détermine une borne sur le nombre de cyclages nécessaires avant de faire monter l'inf. Si au bout d'autant de cyclages consécutifs on n'a pas monté, c'est qu'on ne peut pas aller plus haut !

Théorème (Birman, Ko, Lee, 2000)

Soit g une tresse dans B_n.
Si $\inf(g) < \inf^{\simeq}(g)$, alors $\inf(\mathrm{cycl}^{|\Delta_n|-1}(g)) > \inf(g)$.

Remarque : La borne est la même pour les décyclages.

Bornes sur le nombre de (dé)cyclages

Remarque bonus : La borne dépend de la longueur de la tresse fondamentale, qui vaut ici $|\Delta_n| = \frac{n(n-1)}{2}$.
Pour faire le tour des questions classiques des groupes présentés, on peut donc se demander si on ne peut pas trouver une autre présentation de B_n dans laquelle les longueurs des tresses fondamentales seraient plus courtes.
Spoiler : oui, ça existe :-)

Dans leur papier, Birman, Ko et Lee utilisent une "new presentation" dans laquelle les générateurs sont appelés $a_{ts}, \text{ avec } n \geq t > s \geq 1$ et vérifient les relations

- $a_{ts}a_{rq} = a_{rq}a_{ts}$ si $(t-r)(t-q)(s-r)(s-q) > 0$
- $a_{ts}a_{sr} = a_{tr}a_{ts} = a_{sr}a_{tr}$ si $n \geq t > s > r \geq 1$

Dans cette présentation, la tresse fondamentale devient $\delta_n = a_{n(n-1)}a_{(n-1)(n-2)} \dots a_{32}a_{21}$ et est donc de longueur $n-1$ seulement!