Escalier de Cantor

Baptiste Dugué

Leçons concernées (2024) :

— 228 : Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.
— 229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.
— 241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
— 244 : Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

....

Dans ce développement, on construit l'escalier de Cantor, parfois aussi appelé "escalier du diable". Il s'agit d'une fonction continue et croissante f du segment $[0,1]$ dans lui-même, avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, qui est dérivable presque partout (au sens de la mesure de Lebesgue) et de dérivée nulle partout lorsqu'elle existe. On commence par définir l'ensemble triadique de Cantor, auquel notre fonction est intimement liée :

Définition 1. On considère l'ensemble $A_0 := [0,1]$ puis on définit par récurrence, pour tout entier n : $A_{n+1} := \frac{A_n}{3} + \frac{2A_n}{3}$. L'ensemble triadique de Cantor est l'ensemble $C := \bigcap_{n\geq 0} A_n$.

Premières itérations de la construction de C. Source : Wikipédia

La première propriété remarquable "du Cantor" est qu'il s'agit d'un ensemble de mesure nulle. Dans toute la suite, on notera λ la mesure de Lebesgue.

Lemme 2. *On a* $\lambda(C) = 0$.

Preuve (Esquisse) : Pour chaque entier n, A_n est (par récurrence...) une union disjointe de 2^n segments pour lesquels la mesure de Lebesgue est simplement la longueur, en l'occurrence $\frac{1}{3^n}$. On a donc pour tout n, $\lambda(A_n) = (\frac{2}{3})^n$. Comme $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'ensembles de mesure finie, on a (propriété de la mesure) :

$$\lambda(C) = \lambda\left(\lim_{N\to\infty} \bigcap_{n=0}^{N} A_n\right) = \lim_{N\to\infty} \lambda\left(\bigcap_{n=0}^{N} A_n\right) = \lim_{N\to\infty} \lambda(A_N) = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^N = 0.$$

□

Et c'est parti pour le show :

Théorème 3. *Il existe une fonction* $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ *continue et croissante, telle que* $f(0) = 0$ *et* $f(1) = 1$*, dérivable sur* $[0,1] \setminus C$ *avec pour tout* $x \in [0,1] \setminus C$, $f'(x) = 0$.

Démonstration. On va construire la fonction f comme une limite uniforme de fonctions continues. Pour cela on introduit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0,1]$:

$$f_n(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \int_0^x \mathbb{1}_{A_n}(t)dt.$$

Remarque : à partir de là, mieux vaut tracer sur un dessin les premières étapes de construction du Cantor ainsi que les graphes des premiers f_n pour suivre la preuve !

Il s'agit d'une suite d'applications continues et croissantes sur $[0,1]$ et vérifiant pour chaque terme $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 1$. Montrons que cette suite converge uniformément sur [0,1] :

Par construction, f_n ne varie que sur A_n qui est une union d'intervalles. Il est ainsi naturel d'étudier son comportement sur ces intervalles. Soit donc I une composante connexe de A_n. Toujours par construction, on a $\lambda(I) = \frac{1}{3^n}$ et $\lambda(I \cap A_{n+1}) = \frac{2}{3}\lambda(I) = \frac{2}{3^{n+1}}$.

Ainsi, on a :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n \int_I \mathbb{1}_{A_n}(t)dt = \left(\frac{3}{2}\right)^n \int_I \left(\frac{3}{2}\right) \mathbb{1}_{A_{n+1}}(t)dt = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \int_I \mathbb{1}_{A_{n+1}}(t)dt = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \lambda(I \cap A_{n+1}) = \frac{1}{2^n}.$$

Notons (*) cette égalité.

Par ailleurs, pour un n fixé, la fonction f_n est constante sur toute composante connexe de $A_n^{\complement}$, et $A_n^{\complement} \subset A_{n+1}^{\complement}$, donc f_{n+1} est elle aussi constance sur toute composante connexe de $A_n^{\complement}$. Pour tout $x \in A_{n+1}^{\complement}$, on a donc :

$$f_n(x) = \sum_{I \text{ composante connexe de } A_n \cap [0,x]} \left(\frac{3}{2}\right)^n \int_I \mathbb{1}_{A_n}(t)dt = \sum_I \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \int_I \mathbb{1}_{A_{n+1}}(t)dt = f_{n+1}(x).$$

Cette égalité se prolonge par continuité de f_n et f_{n+1} au bord de la composante considérée : si on note $\min S$ le plus petit élément d'un segment S, on a donc pour toute composante connexe I de A_n : $f_n(\min I) = f_{n+1}(\min I)$. Pour un tel I et n'importe quel $x \in I$, on a donc :

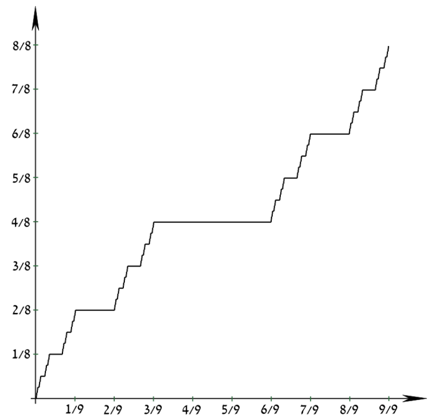
$$|f_n(x) - f_{n+1}(x)| \leq |f_n(x) - f_n(\min I)| + |\underbrace{f_{n+1}(\min I)}_{= f_n(\min I)} - f_{n+1}(x)| \leq \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Où la dernière inégalité résulte de (*). Cela suffit pour justifier que la suite $(f_n)_n$ est de Cauchy [1] sur $[0,1]$: soient $p < q \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leq \sum_{k=p}^{q-1} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| \leq \underbrace{\sum_{k \geq p} \frac{1}{2^{k-1}}}_{\text{reste d'une série convergente}} \xrightarrow[p \to \infty]{} 0.$$

La suite $(f_n)_n$ converge donc uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction f qui est continue et croissante, avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

Enfin, sur tout $J \subset C^{\complement}$ intervalle fermé du complémentaire du Cantor, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $J \subset A_n^{\complement}$. Ainsi, sur un tel J, f est limite uniforme de fonctions constantes, donc dérivables de dérivées nulles. Autrement dit, pour tout $x \in C^{\complement}$, f est dérivable en x et on a $f'(x) = 0$, ce qui conclut la démonstration. $\square$



Graphe de l'escalier de Cantor. Source : Wikipédia

. . . .

Source : Analyse. Théorie de l'intégration, Brian-Pagès

1. Rappelons qu'une suite de fonctions (f_n) est dite (**uniformément**) **de Cauchy** sur I si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall p, q \geq N_\varepsilon, \forall x \in I, |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon.$$

Rappelons également qu'une suite de fonction (f_n) converge uniformément sur I si et seulement si elle y est de Cauchy (c'est le **critère de Cauchy uniforme**).