

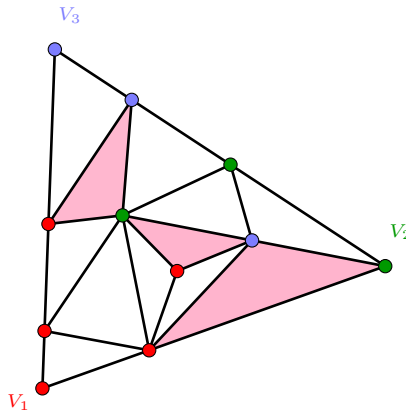
SPERNER, BROUWER, PERRON ET FROBENIUS

1 Lemme de Sperner

Théorème 1 (Lemme de Sperner). *Considérons un « grand » triangle de sommets V_1, V_2, V_3 , et une triangulation de ce triangle, c'est-à-dire une décomposition en plus petits triangles appelés cellules telle que l'intersection entre deux cellules soit toujours ou bien vide, ou bien un sommet commun, ou bien un côté commun. (Concrètement, cela signifie que le sommet d'une cellule ne peut pas être à l'intérieur d'un côté d'une autre cellule.) Colorions maintenant chaque sommet de la triangulation en rouge, vert ou bleu, en imposant les deux règles suivantes :*

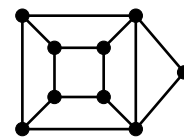
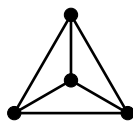
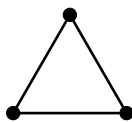
- V_1, V_2, V_3 sont coloriés respectivement en rouge, vert et bleu,
- un sommet situé sur un segment $[V_i, V_j]$ sera colorié comme V_i ou comme V_j .

Alors il existe au moins une cellule tricolore, c'est-à-dire dont les sommets sont de trois couleurs différentes.



- 1) Montrer que dans un graphe, il y a toujours un nombre pair de sommets de degré impair.
- 2) Le *graphe dual* $\mathcal{G}^*$ d'un graphe $\mathcal{G}$ est le graphe obtenu en plaçant un sommet dans chaque cellule de $\mathcal{G}$, ainsi qu'un sommet à l'« extérieur » du graphe, et en reliant par une arête les paires de sommets associés à des cellules de $\mathcal{G}$ partageant un *côté*, aussi appelé *face* (le sommet « extérieur » est relié à tous les sommets associés à des cellules « au bord »).

Dessiner les graphes duaux des graphes suivant :



- 3) Comme dans le lemme de Sperner, on considère maintenant un graphe $\mathcal{T}$ qui soit une triangulation de notre triangle, et un coloriage de $\mathcal{T}$. Construire un sous-graphe du graphe dual $\mathcal{T}^*$ comportant la même liste de sommets mais seulement certaines arêtes, de telle sorte que le degré d'un sommet soit impair si et seulement si c'est un sommet associé à une cellule tricolore, ou s'il s'agit du sommet « extérieur ».

- 4) Conclure la démonstration du théorème.

2 Point fixe de Brouwer

Théorème 2 (Point fixe de Brouwer). *Soit K une partie convexe compacte de $\mathbb{R}^n$. Alors toute fonction continue $f : K \rightarrow K$ admet un point fixe.*

Ce théorème possède plusieurs jolies démonstrations. Ma préférée utilise le lemme de Sperner, qui fait l'objet de l'exercice précédent.

0) Question optionnelle qu'on peut admettre si on le souhaite : Montrer que tout convexe compact $K \subset \mathbb{R}^n$ contenant une boule (autrement dit d'intérieur non vide) est homéomorphe à la boule unité $\mathbb{B}^n$. (On pourra s'intéresser à la jauge d'un convexe, et aller fouiller sur internet ou dans des livres pour (re)découvrir cette notion si besoin.) En déduire qu'il suffit de démontrer le théorème du point fixe de Brouwer pour n'importe quel convexe compact qui nous arrange.

1) Se convaincre qu'on connaît déjà le résultat en dimension 1.

On s'attaque maintenant à la dimension 2. On considère dans $\mathbb{R}^3$ la partie Δ , enveloppe convexe des points $V_1 := (1, 0, 0)$, $V_2 := (0, 1, 0)$ et $V_3 := (0, 0, 1)$.

2) Dessiner Δ et remarquer que les choses sont décidément bien faites.

On procède par l'absurde en considérant une application $f : \Delta \rightarrow \Delta$ continue sans point fixe et on note, pour tout $x \in \Delta$, $f(x) = (f(x)_1, f(x)_2, f(x)_3)$ les coordonnées d'un point image par f . On définit alors une application de coloriage

$$C : \begin{array}{ccc} \Delta & \longrightarrow & \{1, 2, 3\} \\ x = (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & \min \{i \in \{1, 2, 3\} \mid f(x)_i < x_i\}. \end{array}$$

3) Justifier que l'application C est a priori bien définie (on ne se soucie pour l'instant pas de son éventuelle continuité).

Soit maintenant $\mathcal{T}$ une triangulation de Δ , dont on colorie chaque point avec l'application C .

4) En utilisant l'exercice précédent, justifier qu'il existe une cellule tricolore de $\mathcal{T}$ pour le coloriage induit par C .

5) En considérant $(\mathcal{T}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de triangulations de plus en plus fines, c'est-à-dire telle que

$$\delta(\mathcal{T}_k) := \max\{\text{longueur d'une arête de } \mathcal{T}_k\} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0,$$

et en utilisant à profit les hypothèses du théorème que l'on n'a pas encore mobilisées, construire un point de Δ pour lequel C ne peut pas être bien définie et conclure.

6) Question bonus : Expliquer comment adapter la preuve à une dimension finie plus grande que 2. *Indication : Quelle est la généralisation d'un triangle en dimensions supérieures ?*

3 Perron-Frobenius

En application de l'exercice précédent, je propose une démonstration d'une partie des résultats du théorème de Perron-Frobenius. Voici ce qu'on va montrer :

Théorème 3 (Perron-Frobenius partiel). *Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$ une matrice dont tous les coefficients soient strictement positifs¹. Alors M admet un vecteur propre associé à une valeur propre $\lambda > 0$ dont tous les coefficients sont strictement positifs.*

1) Justifier que M stabilise le cône positif $\mathcal{C} := \{(x_1, \dots, x_n) \mid \forall i, x_i \geq 0\}$.

2) Soit $\mathcal{S}$ l'enveloppe convexe des points $\{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$ (Oh, c'est un simplexe!). Justifier que $\mathcal{S}$ est en bijection avec $\mathcal{C}/\mathbb{R}_+$ l'ensemble des demi-droites partant de l'origine et vivant dans le cône $\mathcal{C}$. Notons $\varphi : \mathcal{C}/\mathbb{R}_+ \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}$ cette bijection.

On introduit $\pi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$ l'application de projection qui à $x \in \mathcal{C}$ associe $\varphi(\bar{x}) \in \mathcal{S}$, où $\bar{x}$ est le représentant de x dans $\mathcal{C}/\mathbb{R}_+$.

3) Justifier que l'application $\pi \circ M : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ est bien définie, injective et continue.

4) Conclure à l'aide de mon théorème du point fixe préféré.

1. En fait, on pourrait demander que la matrice soit seulement *irréductible*, ce qui revient à dire que A a tous ses coefficients supérieurs ou égaux à 0 et à demander l'existence d'un entier $k \leq n - 1$ tel que la matrice $(M + I_n)^k$ ait tous ses coefficients strictement positifs.