Petits triangles, grands triangles

Une introduction à la courbure

Baptiste Dugué

Aix-Marseille Université

7 février 2025 - ENS Rennes

Sommaire

1. La somme des angles d'un triangle vaut...
2. Qu'est-ce qu'un triangle ?
3. Exemples de triangles
4. La somme des angles d'un triangle, le retour
5. À quoi servent les triangles ?

La somme des angles d'un triangle vaut...

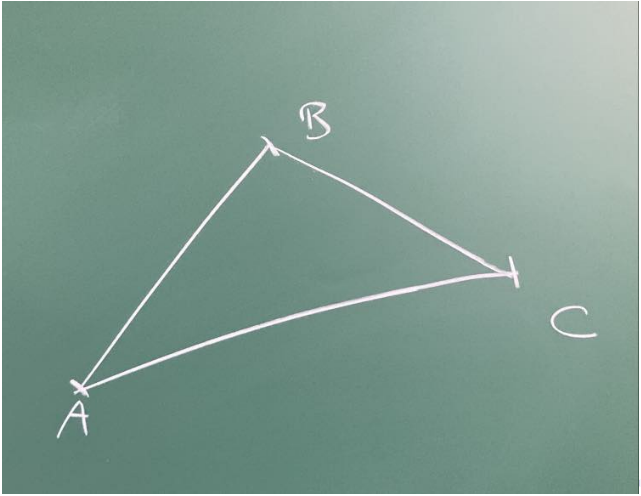
Proposition

La somme des angles d'un triangle vaut π.

La somme des angles d'un triangle vaut...

Proposition

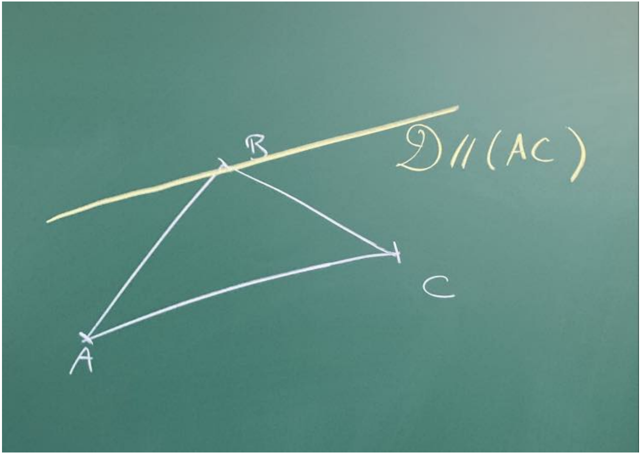
La somme des angles d'un triangle vaut π.



La somme des angles d'un triangle vaut...

Proposition

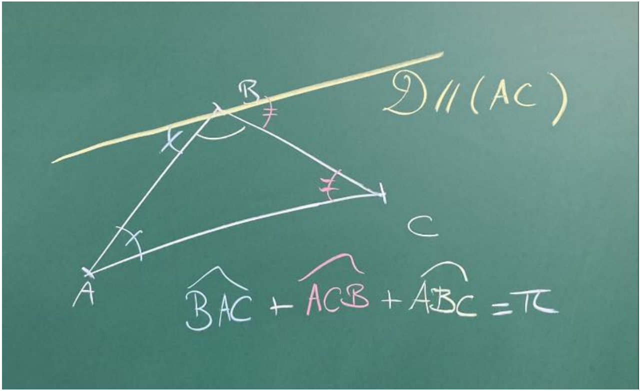
La somme des angles d'un triangle vaut π.



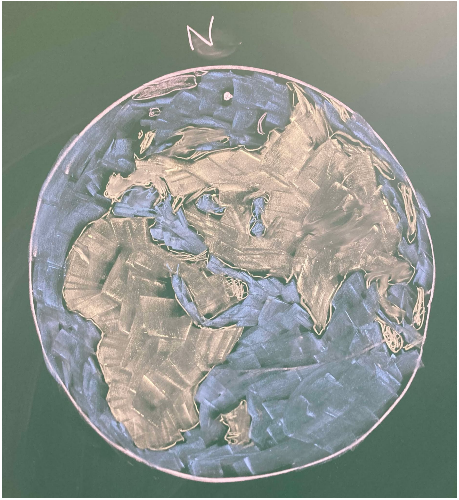
La somme des angles d'un triangle vaut...

Proposition

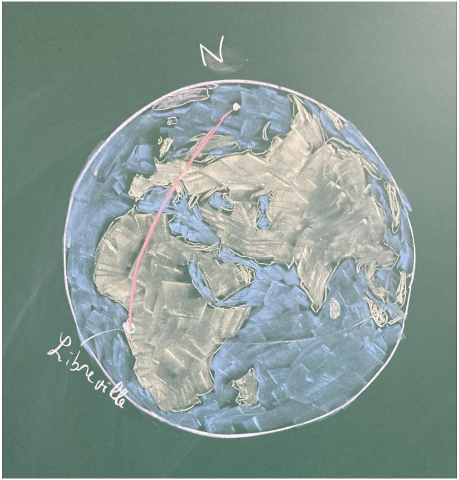
La somme des angles d'un triangle vaut π.



La somme des angles d'un triangle vaut...

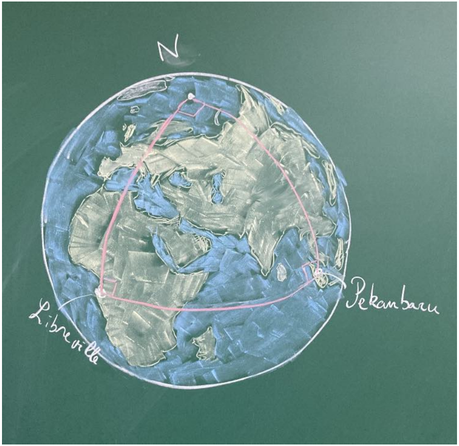


La somme des angles d'un triangle vaut...



La somme des angles d'un triangle vaut...

La somme des angles d'un triangle vaut...



Un triangle à trois angles droits ! La somme des angles du triangle PôleNord-Libreville-Pekanbaru vaut $\frac{3\pi}{2}$!

Qu'est-ce qu'un triangle ?

Définition

Soit M une variété différentielle. Une **métrique riemannienne** g **sur** M est une application lisse qui à tout $x \in M$ associe g_x, un produit scalaire sur T_xM l'espace tangent à M en x.

Définition

Une **variété riemannienne** est une variété différentielle munie d'une métrique riemannienne.

Qu'est-ce qu'un triangle ?

Définition

Soit M une variété différentielle. Une **métrique riemannienne g sur M** est une application lisse qui à tout $x \in M$ associe g_x, un produit scalaire sur T_xM l'espace tangent à M en x.

Définition

Une **variété riemannienne** est une variété différentielle munie d'une métrique riemannienne.

Exemples

- L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel.
- La sphère S^2 plongée dans $\mathbb{R}^3$ munie de la restriction du produit scalaire de $\mathbb{R}^3$ (les espaces tangents de S^2 sont des espaces $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$).

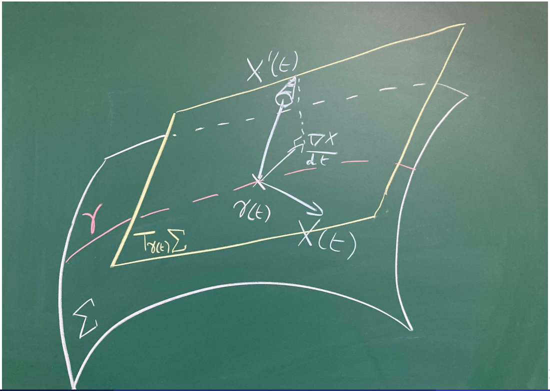
Qu'est-ce qu'un triangle ?

La notion de variété riemannienne permet de formaliser le concept de "plus court chemin".
Idée intuitive : Un chemin est "le plus court" s'il est "droit", autrement dit si les vecteurs vitesse en chaque point du chemin sont **parallèles**.

Qu'est-ce qu'un triangle ?

Définition

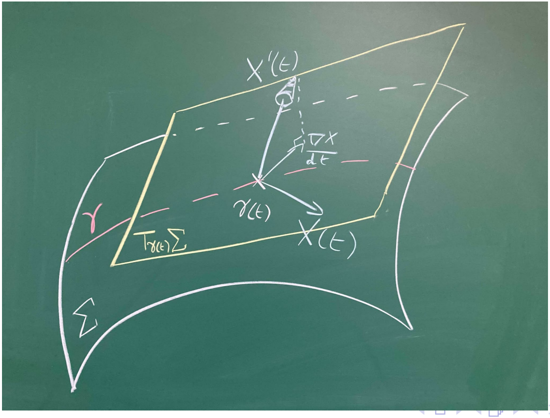
Soit Σ une surface plongée et X un champ de vecteurs le long d'un arc γ sur Σ. La **dérivée covariante de X le long de γ** à l'instant t, notée $\frac{\nabla X}{dt}(t) \in T_{\gamma(t)}\Sigma$, est la projection orthogonale sur l'espace tangent $T_{\gamma(t)}\Sigma$ de $X'(t) \in \mathbb{R}^3$.



Qu'est-ce qu'un triangle ?

Définition

Le champ X est dit **parallèle le long de** γ si sa dérivée covariante est identiquement nulle, c'est-à-dire si pour tout $t \in I$, le vecteur $X'(t)$ est normal à Σ au point $\gamma(t)$.



Qu'est-ce qu'un triangle ?

Géodésique

Soit M une variété riemannienne. Un arc lisse $\gamma : I \to M$ est une **géodésique** de M si le champ γ' de ses vecteurs vitesse est parallèle le long de γ (c'est-à-dire si $\nabla\gamma'/dt = 0$) et ne s'annule jamais.

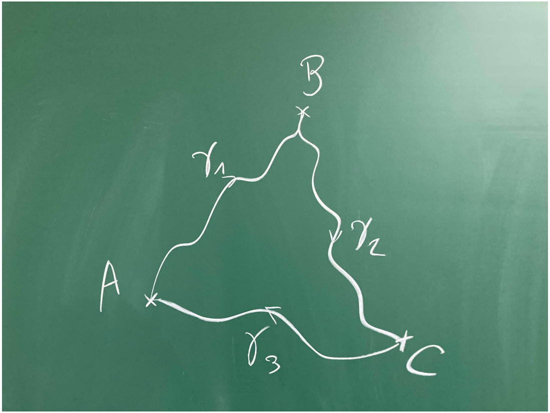
Remarque : L'intuition donnée juste avant ne vaut que pour les cas de variétés plongées avec pour métrique la restriction du produit scalaire de l'espace ambiant. La géométrie riemannienne permet de généraliser tout ça en introduisant les **connexions**, des applications (souvent notées ∇) qui permettent de comparer des vecteurs tangents en des points distincts.

C'est assez moche, donc je n'en parle pas trop.

Qu'est-ce qu'un triangle ?

Définition

Un **triangle** (géodésique) sur une variété riemannienne M est la donnée de trois points reliés deux-à-deux par des portions de géodésiques.



Exemples de triangles

Proposition

Dans $(\mathbb{R}^2, < | >)$, les géodésiques sont des droites, donc les triangles géodésiques sont... des triangles.

Proposition

Dans $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, les géodésiques sont les **grands cercles**, c'est-à-dire les cercles centrés en l'origine et de rayon 1. Les triangles géodésiques sont donc les figures de la forme PôleNord-Libreville-Pekanbaru.

Exemples de triangles

Plan hyperbolique

Le **demi-plan de Poincaré** est l'ensemble des points d'ordonnée strictement positive dans le plan $\mathbb{R}^2$.
On peut le munir de la métrique riemannienne $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$ pour en faire une variété riemannienne.
On note cet espace $\mathbb{H}^2$.

Proposition

Les géodésiques de $\mathbb{H}^2$ sont les droites verticales et les demi-cercles centrés en un point d'ordonnée 0.

Remarque : On peut aussi introduire une distance sur $\mathbb{H}^2$ à l'aide du birapport et construire les géodésiques par ce biais.

Exemples de triangles

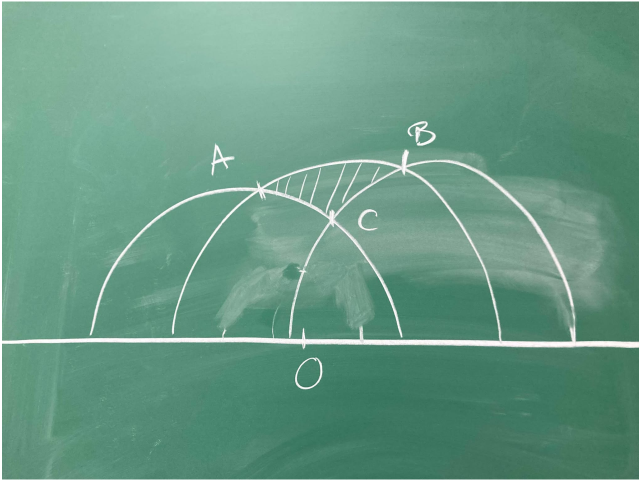


Figure: Un triangle hyperbolique

Exemples de triangles

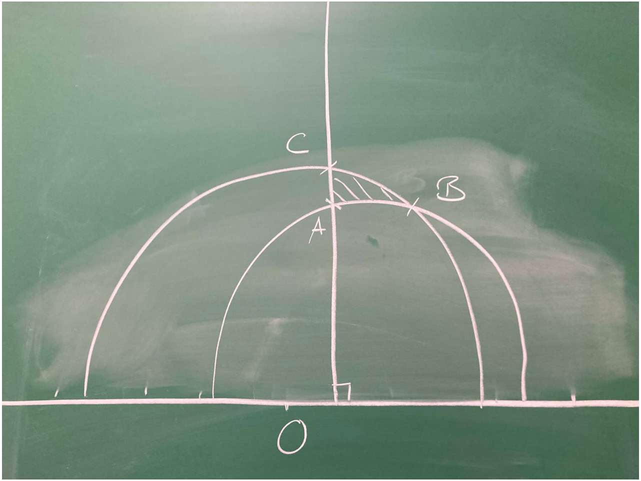


Figure: Un autre triangle hyperbolique

La somme des angles d'un triangle, le retour

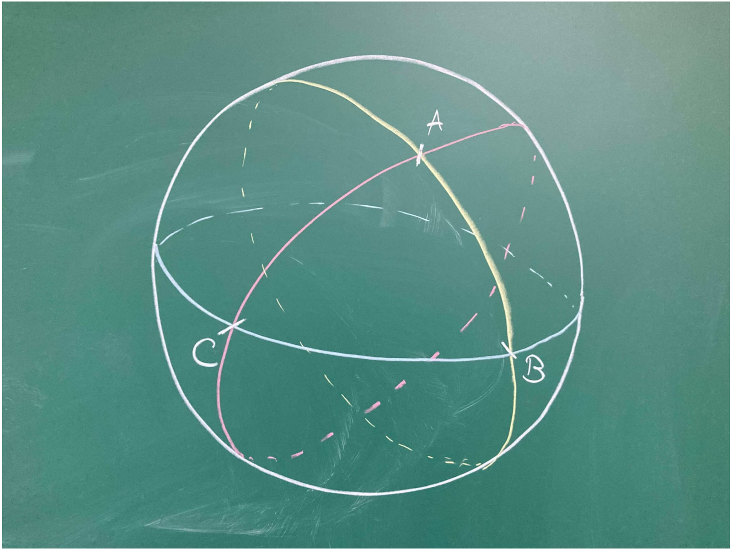
Proposition

Soit $\mathcal{T}$ un triangle géodésique sur S^2, de sommets A, B, C et d'angles α, β, γ. Alors l'aire de $\mathcal{T}$ vaut $\mathcal{A} = \alpha + \beta + \gamma - \pi$.

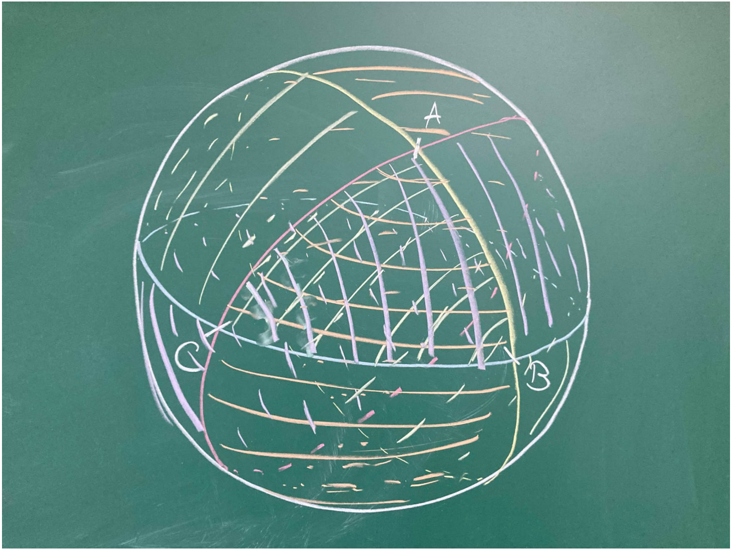
Corollaire

La somme des angles d'un triangle géodésique sur S^2 est toujours supérieure à π.

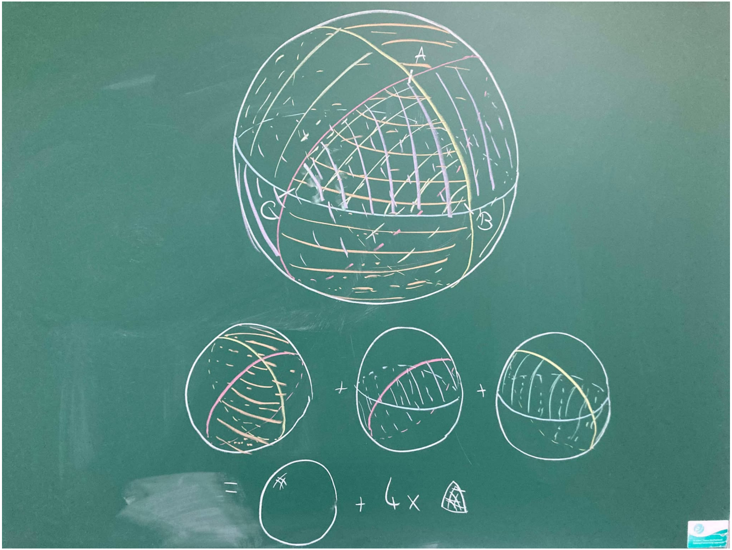
La somme des angles d'un triangle, le retour



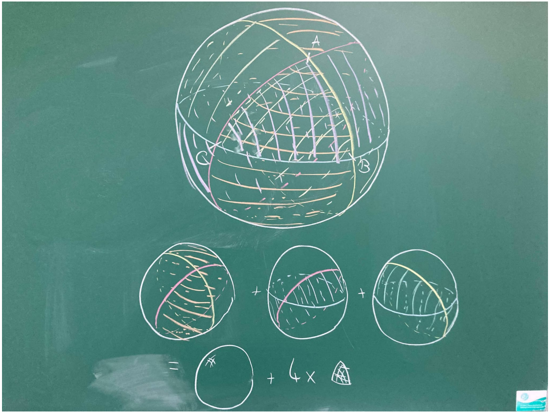
La somme des angles d'un triangle, le retour



La somme des angles d'un triangle, le retour



La somme des angles d'un triangle, le retour



L'aire d'une sphère de rayon r vaut $4\pi r^2$, donc l'aire de S^2 vaut 4π.
L'aire d'une double-lunule d'angle θ vaut $2 * 2\theta = 4\theta$.
On a donc finalement

$$4\alpha + 4\beta + 4\gamma = 4\pi + 4\mathcal{A}.\square$$

La somme des angles d'un triangle, le retour

En utilisant l'action de $PSL_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{H}^2$, on montre que les triangles hyperboliques sont "petits" :

Proposition

L'aire d'un triangle hyperbolique d'angles α, β, γ vaut $\mathcal{A} = \pi - \alpha - \beta - \gamma$.

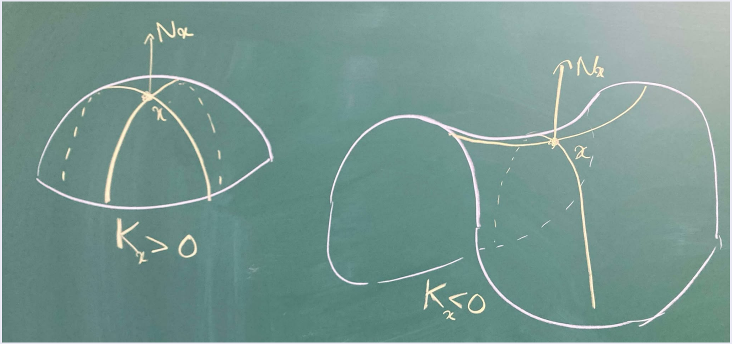
Corollaire

La somme des angles d'un triangle hyperbolique est inférieure à π.

À quoi servent les triangles ?

Définition

Soit Σ une surface (donc dans $\mathbb{R}^3$) orientée et $\mathbf{N}$ le champ de vecteurs unitaires normaux à Σ. L'**application de Gauss** est l'application qui à un point $x \in \Sigma$ associe $\mathbf{N}_x$ le vecteur normal à Σ en x unitaire.
La **courbure de Gauss** de Σ au point x est le réel $K_x = \det(d_x\mathbf{N})$.



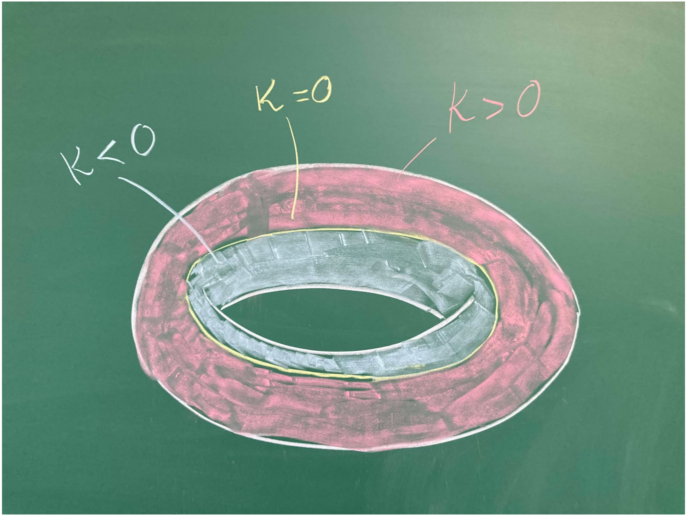
À quoi servent les triangles ?

Proposition

La sphère S^2 a une courbure constante égale à 1.
Le plan hyperbolique a une courbure constante égale à -1.

Et le tore ?

À quoi servent les triangles ?



Le tore plongé n'est pas une surface à courbure constante !

À quoi servent les triangles ?

Théorème de Gauss-Bonnet

L'intégrale sur Σ une surface orientable compacte connexe de sa courbure de Gauss est un invariant topologique !
Plus précisément, si Σ est une telle surface (sans bord) de mesure de surface $d\sigma$ et de genre g (c'est "le nombre de trous"), alors

$$\int_{\Sigma} K d\sigma = 2\pi * 2(1-g).$$

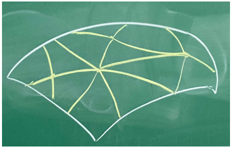
L'entier $2(1-g)$ se note $\chi(\Sigma)$, c'est la **caractéristique d'Euler** de Σ.

À quoi servent les triangles ?

La caractéristique d'Euler d'une surface compacte Σ s'obtient à l'aide d'une triangulation (géodésique) de la surface :

$$\chi(\Sigma) = f - a + s$$

où f est le nombre de faces (triangles), a le nombre d'arêtes et s le nombre de sommets de la triangulation.



Théorème de topologie

La caractéristique d'Euler d'une surface ne dépend pas de la triangulation considérée et est un invariant topologique.

À quoi servent les triangles ?

Pour démontrer le théorème de Gauss-Bonnet général, on commence par démontrer une formule pour les triangles :

Formule de Gauss-Bonnet pour les triangles

Si $\mathcal{T}$ est un triangle géodésique sur Σ d'angles $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, on a

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi = \int_{\mathcal{T}} K d\sigma + \int_{\partial\mathcal{T}} k_g ds$$

où k_g est la courbure géodésique définie sur un arc géodésique paramétré par s.

On peut interpréter le dernier terme comme un terme correctif qui rend compte du fait que les côtés du triangle ne sont pas des segments.

À quoi servent les triangles ?

Démonstration du théorème de Gauss-Bonnet :

On considère $(T_i)_{1\leq i\leq f}$ une triangulation à f faces de Σ, où les angles du triangle T_i seront notés $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3}$.
La formule de Gauss-Bonnet appliquée à un T_i donne :

$$\alpha_{i1} + \alpha_{i2} + \alpha_{i3} - \pi = \int_{T_i} K d\sigma + \int_{\partial T_i} k_g ds.$$

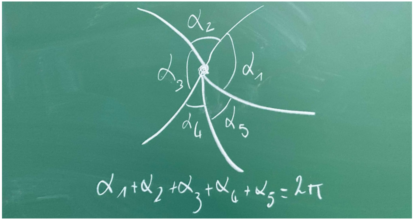
En sommant sur tous les i, les termes correctifs se simplifient : chaque arête appartient à deux triangles et est parcourue dans deux sens opposés.
Il reste

$$\sum_{i=1}^{f} (\alpha_{i1} + \alpha_{i2} + \alpha_{i3}) - \pi f = \int_{\Sigma} K d\sigma.$$

À quoi servent les triangles ?

$$\sum_{i=1}^{f}(\alpha_{i1}+\alpha_{i2}+\alpha_{i3})-\pi f=\int_{\Sigma}K d\sigma.$$

En chaque sommet, la somme des angles vaut 2π.



En reprenant la somme précédente que l'on indexe maintenant sur les sommets, on obtient

$$2\pi s-\pi f=\int_{\Sigma}K d\sigma.$$

À quoi servent les triangles ?

$$2\pi s - \pi f = \int_\Sigma K d\sigma$$

Chaque face possède trois arêtes, donc $3f = 2a$. Autrement dit, $-f = 2f - 2a$, d'où finalement

$$\int_\Sigma K d\sigma = 2\pi s - \pi f = 2\pi(s - a + f) = 2\pi\chi(\Sigma).$$

Youpi !

À quoi servent les triangles ?

Gauss-Bonnet

$$\int_\Sigma K d\sigma = 2\pi * 2(1-g) = 2\pi\chi(\Sigma)$$

Exemple d'application :

Toute surface connexe orientable à courbure partout strictement positive est homéomorphe à la sphère : Gauss-Bonnet implique $\chi(\Sigma) > 0$, donc $g = 0$.

En particulier, il n'existe donc pas de métrique sur le tore telle que la courbure soit partout strictement positive.

Merci beaucoup pour votre attention !

Quelques références :

Fuchsian Groups - Svetlana Katok
Introduction aux variétés différentielles - Jacques Lafontaine
Initiation à la géométrie de Riemann - François Rouvière