Suite de complexes de module 1

L'objectif de cet exercice est de montrer le résultat suivant.

Proposition 0.1. *Soient $z_1, \dots, z_p$ des complexes de module 1 tels que la suite de terme général*

$$u_n = z_1^n + \dots + z_p^n$$

converge. Alors les z_i valent tous 1 et la limite de la suite (u_n) est p.

Question 1: Montrer que p est valeur d'adhérence de la suite (u_n).

Proposition de réponse:
La suite $(z_1^n, \dots, z_p^n)_n$ à valeurs dans $\mathbb{C}^p$ est bornée donc admet une sous-suite convergente $(z_1^{\varphi(n)}, \dots, z_p^{\varphi(n)})_n$ de limite $(l_1, \dots, l_p)$. Pour tout i, le complexe l_i est de module 1 donc est non nul, donc la limite des quotients d'éléments de la suite $(z_i^{\varphi(n)})_n$ vaut 1:

$$\lim_{n\to\infty} z_i^{\varphi(n+1)-\varphi(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{z_i^{\varphi(n+1)}}{z_i^{\varphi(n)}} = 1.$$

Pour pouvoir conclure que $(u_{\varphi(n+1)-\varphi(n)})$ converge il faut encore s'assurer que la suite $(\varphi(n+1)-\varphi(n))_n$ soit strictement croissante. Ce n'est pas automatique mais il suffit d'imposer la condition $\varphi(n+1) > 2\varphi(n) - \varphi(n-1)$ dans la construction de l'extractrice pour que ce soit le cas donc ce n'est pas une difficulté majeure.

Question 2: Quels sont les $(z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{U}^p$ tels que (u_n) converge ?

Proposition de réponse:
Considérons un p-uplet $(z_1, \dots, z_p)$ tel que la suite (u_n) associée converge. D'après la première question, (u_n) converge alors nécessairement vers p. Si on considère $(l_1, \dots, l_p)$ une valeur d'adhérence de la suite $(z_1^n, \dots, z_p^n)_n$, on obtient donc $l_1 + \dots + l_p = p$ avec pour chaque i, $|l_i| = 1$. Il y a donc égalité dans l'inégalité triangulaire et les l_i sont donc tous de même argument. On peut donc écrire $pl_1 = p$, et donc $l_1 = \dots = l_p = 1$. La suite $(z_1^n, \dots, z_p^n)$ admet donc une unique valeur d'adhérence, et **comme on est en dimension finie**, elle est donc convergente (de limite $(1, \dots, 1)$). Chaque suite $(z_i^n)_n$ converge donc vers 1, et chaque z_i vaut donc nécessairement 1.

Bilan des courses: Le seul p-uplet tel que (u_n) converge est $(1, \dots, 1)$.

Référence: Oraux X-ENS algèbre 3 - Francinou, Gianella, Nicolas (exercice 2.23)