Payer avec de petites pièces

Voici un petit exercice préparé pour une leçon mais que je n'ai finalement pas posé. L'idée est de répondre à la question "combien de façons y a-t-il de payer N euros avec des pièces de 1 et 2 euros ?" en calculant un DL de deux façons différentes.

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2(1+x)}.$$

Première question : calculer le développement limité de f à l'ordre n en 0.

Deuxième question : en remarquant qu'on a aussi

$$f(x) = \frac{1}{(1-x^2)(1-x)},$$

déterminer le nombre de façons de payer 100 euros avec des pièces de 1 et 2 euros.

Proposition de correction :

1) On décompose f en éléments simples, on trouve

$$f(x) = \frac{1}{4}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{1+x}.$$

On calcule donc le DL de f en développant chaque terme (pour rappel, les DL de $\frac{1}{1\pm x}$ sont usuels, et on retrouve celui de $\frac{1}{(1-x)^2}$ en dérivant celui de $\frac{1}{1-x}$) :

$$f(x) = \frac{1}{4}(\sum_{k=0}^{n} x^k + 2\sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k) + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2k+3+(-1)^k}{4} x^k + o(x^n).$$

2) On effectue le DL du produit :

$$f(x) = \sum_{p=0}^{n} x^p \sum_{q=0}^{n} x^{2q} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n}(\sum_{p+2q=k} 1)x^k + o(x^n).$$

La quantité $\sum_{p+2q=k} 1$ est justement le nombre de façons de payer k euros avec des pièces de 1 et 2 euros. Par unicité du développement limité, on a donc pour tout entier k :

$$\sum_{p+2q=k} 1 = \frac{2k+3+(-1)^k}{4}.$$

En particulier, pour $k = 100$, on trouve donc qu'il y a $\frac{200+3+1}{4} = 51$ façons de payer 100 euros avec des pièces de 1 et 2 euros.