Retour oral d'algèbre 2023 - Brian Flanagan

Couplage : 153/190, j'ai choisi la 190 (méthodes combinatoires).
Développements : Théorème de Polya par le dénombrement, Réciprocité quadratique par les formes quadratiques sur les corps finis.
Développement choisi : Réciprocité quadratique, fait en 14'30.
Note : 20

Questions sur le développement :

- Pourquoi on considère l'action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et pas d'un autre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans le développement ?
  réponse : parce que les sous-groupes de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sont lui-même et le groupe trivial.
- À quoi sert la réciprocité quadratique ?
  réponse : on peut calculer facilement à la main des résidus quadratiques, et je donne dans mon plan un text de primalité de snombres de mersenne qui en découle.
- Calculer le résidu quadratique de 7 modulo 13.

Petites questions :

- Que dire de la structure de $\mathbb{F}_q^*$? Donner le schéma de la preuve de sa cyclicité.
  réponse : j'ai donné le schéma de la preuve qui passe par l'exposant d'un groupe, il a un peu fait la grimace, ça ne devait pas être sa preuve favorite.
- Pour $i \leqslant q-2$ fixé, calculer la somme des x^i avec x parcourant F_q^*.
  réponse : j'ai calculé le carré de cette somme et conclu qu'elle vallait 0 ou -1. Le jury m'a rappelé que F_q^* était cyclique et j'ai refait le calcul et bien trouvé que la somme vallait 0... je me suis senti un peu idiot.
- Que dire d'un groupe d'ordre p^2 ? (il est abélien) Démontrer-le.
  réponse : je l'ai fait en utilisant que le centre d'un p-groupe est non trivial (c'était dans mon plan). Le démontrer.

Exercices :

- Calculer le cardinal de X_r l'ensembles des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$ de rang fixé $r < n$. J'ai directement dit que j'avais envie d'utiliser l'action par congruence puisque toute matrice de rang r est équivalente à J_r la matrice diagonale avec r un et $n-r$ zéros, mais je n'ai pas su tout de suite avancer. On m'a demandé ce que cela voulait dire en terme d'orbite. J'ai dit que toutes les matrices de rang r étaient dans l'orbite de J_r et j'ai ramené le calcul du cardinal à celui du stabilisateur de J_r. On a commencé le calcul mais le jury n'a pas jugé nécessaire de le mener jusqu'au bout. Le jury m'a demandé comment on calculait le cardinal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ et j'ai répondu.
- Calculer X_n le nombre d'involutions dans $\mathfrak{S}_n$ (les éléments s tels que $s^2 = \mathrm{id}$). J'ai indiqué qu'une involution était un produit de transpositions à supports disjoints, mais le jury m'a plutôt suggéré de déterminer une relation de récurrence. Je l'ai déterminée, quelque chose du genre $X_{n+1} = nX_{n-1} + X_n$, en regardant sur quel élément était envoyé $n+1$. Ensuite j'ai dit qu'on pouvait calculer X_n en étudiant la série génératrice exponetielle associée (j'en avais parlé dans mon plan) et ça a convaincu le jury qui ne m'a demandé de faire les calculs (assez fastidieux je crois).
- Calculer le cardinal du commutant d'une permutation de S_n. J'ai proposé de regarder d'abord le cas des cycles, mais le jury m'a plutôt suggéré de regarder des exemples, les permutations (12)(345)(6789) et (12)(34)(6789), qui se sont en effet révélé très instructifs (en utilisant la formule de $\gamma \circ c \circ \gamma^{-1}$ où c est un cycle). En justifiant bien à l'oral (c'était difficile à écrire), on trouve finalement comme formule le produit des $r_k! k^{r_k}$ pour k allant de 1 à n, avec r_k le nombre de k-cycles dans la décomposition en produit de cycles à support disjoints de la permutation.

Jury : Très sympathique et bienveillants, ils donnaient de très bonnes indications.

Disposition : Un tableau à craie et un tableau à feutre, au total ça fait un très grand tableau masi on ne peut pas se contenter du tableau à craie pour le développement.