215

Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

Dans la plupart de la leçon, on considérera des applications $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

I - Différentielle : une généralisation de la dérivation

1) Différentielle d'une application

Def 1 : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$. On dit que f est différentiable en a s'il existe $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ telle que :

$$\forall h \in \mathbb{R}^n,\ a+h \in \Omega \Rightarrow f(a+h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|).$$

L'application L est unique et est appelée différentielle de f en a et notée $df(a)$.

Ex 2 : Soit $\langle \cdot , \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ et $f = \|\cdot\|^2$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall h \in \mathbb{R}^n,\ df(x)(h) = 2\langle x, h \rangle$$

Rmq 3 : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ alors f est différentiable ssi elle est dérivable (en $a \in \mathbb{R}$) et $df(a) = f'(a)$.

Prop 4 : Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in \mathbb{R}^n$, alors il existe un unique vecteur noté $\mathrm{grad} f(a) = \vec{\nabla} f(a) \in \mathbb{R}^n$ appelé gradient de f en a tel que $df(a) = \langle \vec{\nabla} f(a), \cdot \rangle$.

Thm 5 : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$ ouvert. Soit $f : \Omega \to \tilde{\Omega}$ et $g : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^p$. Si f est diff en $a \in \Omega$ et g en $f(a)$, alors $f \circ g$ est diff en a et : $d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$

Coro 6 : Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\gamma : I \to \Omega$ est dérivable en $t \in I$, si $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ est diff en $\gamma(t)$, alors $f \circ \gamma$ est dérivable en t et

$$(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(a))(\gamma'(a)).$$

~~Ex 7 : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert, où $\mathbb{C}$ est identifié à $\mathbb{R}^2$. Soit $z = x+iy \in \Omega$. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Alors f est holomorphe en z ssi f est diff en (x,y)~~

2) Dérivées directionnelles et partielles

Def 7 : Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $a \in \Omega$ et $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On dit que f admet une dérivée partielle en a selon le vecteur v si $\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$ existe. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, si f admet une dérivée partielle en a selon e_i, on la note $\frac{\partial f}{\partial e_i}(a)$.

Def 8 : Soient $(e_1, \dots, e_n)$ et $(e'_1, \dots, e'_m)$ bases de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$. Soit $f = f_1 e'_1 + \dots + f_m e'_m$ de Ω dans $\mathbb{R}^m$. Si f est différentiable en $a \in \Omega$, on appelle matrice jacobienne de f en a la matrice de $df(a)$ dans ces bases et on la note $\mathrm{Jac}(f)(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial e_j} \right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Prop 9 : Dans le cas où cela est bien défini, on a $\mathrm{Jac}(g \circ f)(a) = \mathrm{Jac}(g)(f(a))\, \mathrm{Jac}(f)(a)$

Coro 10 : Soit $f : \Omega \to \tilde{\Omega}$ et $g : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^p$ tq f est différentiable en $a \in \Omega$ et g en $b = f(a)$. Alors pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial e_i}(a) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial e'_k}(b) \frac{\partial f_k}{\partial e_i}(a).$$

Ex 11 : Soit $\gamma : \begin{cases} \Omega =]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{cases}$ et $f : \gamma(\Omega) \to \mathbb{R}$ différentiable. Si $F = f \circ \gamma$, on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta \\ \frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{cases}$$

Ex 12 : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert, où $\mathbb{C}$ est identifié à $\mathbb{R}^2$. Soit $z = x+iy \in \Omega$. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Alors f est holomorphe en z ssi f est différentiable en (x,y) et (en notant $f = u + iv$), $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

3) Applications de classe $\mathcal{C}^1$

Def 13 : Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω si sa différentielle $df : \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ est continue.

Thm 14 : $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω ssi les dérivées partielles de f relativement à une base de $\mathbb{R}^n$ existent et sont continues sur Ω.

On a dans ce cas : $\forall a \in \Omega, \forall h = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i,\ df(a)(h) = \sum_{k=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial e_i}(a)$

Ex 15 : $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$\forall X, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ d(\det)(X)(H) = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}(X) H).$$

Thm 16 : Soit $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ telle que (f_k) CVS vers f sur Ω et (df_k) CVU sur Ω vers g. Alors $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ et $df = g$.

Ex 17 : $\exp : E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to E$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E et $D\exp(0) = \mathrm{Id}_E$.

Thm 18 : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert convexe, $(a,b) \in \Omega^2$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $\mathcal{C}^1$ sur Ω.
Alors : $\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{x \in [a,b]} \|df(x)\| \cdot \|b-a\|$.

Appl 19 : Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, on suppose Ω convexe. Alors f est diff sur Ω de différentielle nulle ssi f est constante sur Ω.

Déf 20 : $f : \Omega \to \tilde{\Omega}$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme si f est bijective, de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\tilde{\Omega}$.

Appl 21 : Les solutions sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ de $x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$
Sont exactement les fonctions de la forme $f : (x,y) \mapsto \frac{x}{2\sqrt{x^2+y^2}} \ln(x^2+y^2) + C\left(\frac{x}{y}\right)$
où $C \in \mathcal{C}^1(]0,+\infty[, \mathbb{R})$.

Thm 22 : Soit $\varphi : \Omega \to \tilde{\Omega}$ un $\mathcal{C}^1$-difféo ($\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$). Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est dans $L^1(\Omega)$, alors $(f \circ \varphi) \cdot |Jac(\varphi)|$ également et :
$$\int_\Omega f = \int_{\tilde{\Omega}} f(\varphi) \cdot |Jac(\varphi)|$$

Appl 23 : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et le volume v_d de $B(0,1) \subset \mathbb{R}^d$ est $\begin{cases} v_d = \frac{\pi^{d/2}}{(\frac{d}{2})!} & \text{si } d \text{ pair} \\ v_d = \frac{2^d \pi^{\frac{d-1}{2}} (\frac{d-1}{2})!}{d!} & \text{sinon} \end{cases}$

II - Les théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites

1) Les énoncés et quelques applications

Thm 24 : Soit (X,d) un espace métrique complet et $F : X \to X$, k-contractante avec $k<1$. Il existe un unique point fixe $a \in X$ ~~telque~~ et $x_0 \in X$ et $x_{n+1} = F(x_n)$, on a : $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ et $d(x_n, a) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)$.

Thm 25 : Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $df(x_0)$ soit un isomorphisme. Il existe $U \subset \Omega$ voisinage ouvert de x_0 et V voisinage ouvert de $f(x_0)$ tel que f soit un $\mathcal{C}^1$-difféo de U dans V.

Appl 26 : $GL_n(\mathbb{R})$ n'admet pas de sous-groupe arbitrairement petit.

Appl 27 : Soit $\Omega_n = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_1 < \cdots < \lambda_n\}$. L'application $\varphi : \Omega_n \to \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i) - X^n$ est un $\mathcal{C}^1$-difféo de $\Omega_n \to \varphi(\Omega_n)$.

Thm 28 : Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, injective sur Ω et tq $df(x)$ soit un isomorphisme en tout point x. Alors $f(\Omega)$ est un ouvert et f est un $\mathcal{C}^1$-difféo de Ω sur $f(\Omega)$.

~~Prop 29 : (Lemme de Morse) Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$~~

Thm 29 : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $(x_0, y_0) \in \Omega$ tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et $d_y f(x_0, y_0)$ est inversible. Il existe U voisinage ouvert de x_0, V voisinage ouvert de y_0 et $\varphi : U \to V$ de classe $\mathcal{C}^1$ tq : $((x,y) \in U \times V$ et $f(x,y) = 0) \iff (x \in U$ et $y = \varphi(x))$
De plus, $d\varphi(x) = -(d_y f(x, \varphi(x)))^{-1} \circ d_x f(x, \varphi(x))$.

Ex 30 : On trace en annexe 3 l'ensemble $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y^3 - 3xy = 0\}$ appelé folium de Descartes.

Appl 31 : (admis) Soit $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ ouvert et $f : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $(t_0, y_0, \lambda) \in \tilde{\Omega}$. Il existe un voisinage $\mathcal{C} = I \times U \times V$ de $(t_0, y_0, \lambda) \in \tilde{\Omega}$ tel que pour tout $(t_1, y_1, \lambda) \in \mathcal{C}$ il existe une unique solution $y_{t_1, y_1, \lambda} : I \to \mathbb{R}^m$ de $y' = f(t, y, \lambda)$ sur $\tilde{\Omega}$ tq $y(t_1) = y_1$ et $(t, y, \lambda) \mapsto y_{t,y,\lambda}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \times C$.

DVP 1

Lemme : (~~Hadamard Lévy~~) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $df(x) \in GL_n(\mathbb{R})$ et il existe $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que $f \circ g = id_{\mathbb{R}^n}$. Alors f est un $\mathcal{C}^1$-difféo et $f^{-1} = g$.

Thm 33 : (Hadamard-Lévy) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Alors f est un $\mathcal{C}^1$-difféo global ssi pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $df(x) \in GL_n(\mathbb{R})$ et $\lim_{\|x\| \to +\infty} \|f(x)\| = +\infty$.

2) Problèmes d'extremas liés

Thm 34 : (extrema liés) Soit $f, g_1, \ldots, g_p \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et $X = \bigcap_{i=1}^p \{g_i = 0\}$. Si $f_{|X}$ admet un extremum local en $a \in X$ et si $(dg_1(a), \ldots, dg_p(a))$ est libre, alors $(df(a), dg_1(a), \ldots, dg_p(a))$ est liée.

Appl 35 : Le parallélépipède rectangle d'aire minimale de volume donné est le cube.

Appl 36 : Théorème spectral

Appl 37 : (Inégalité de Hadamard) $\forall (v_1, \dots, v_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$, $|\det(v_1, \dots, v_n)| \leq \|v_1\| \cdots \|v_n\|$

III - Problèmes d'extrema libres et convexité.

1) Conditions d'ordre 1 et convexité.

Thm 38 : Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ admet un extremum en un point $x_0 \in \Omega$, alors $df(x_0) = 0$.

Rmq 39 : la réciproque est fausse ! Regarder $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$.

Thm 40 : Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (où Ω est convexe) convexe. Si f admet des dérivées partielles en $x_0 \in \Omega$ dans toutes les directions, alors f est différentiable en x_0.

Prop 41 : Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est convexe, si $x, y \in \Omega$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est convexe et différentiable sur Ω, alors : $f(y) - f(x) \geq \langle \vec{\nabla} f(x) \mid y - x \rangle$.

Thm 42 : Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ convexe (et Ω convexe) différentiable sur Ω. Alors f n'admet de maximum local que si elle est constante et admet un minimum global en $x_0 \in \Omega$ ssi $\nabla f(x_0) = 0$.

2) Conditions d'ordre 2, hessienne, convexité

Def 43 : Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω si les applications $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω. On note $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$.

Thm 44 : (Schwarz) Soit $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$. Pour tout $a \in \Omega$ et $i, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Def 45 : Soit $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ et $x_0 \in \Omega$. On appelle hessienne de f en x_0 la matrice $H(f)(x_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$. On a $H(f)(x_0) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

Prop 46 : Soit x_0 un point critique de $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$. Si $H(f)(x_0)$ est définie négative (resp. positive), alors x_0 est un maximum (resp. minimum) local de f. Si $H(f)(x_0)$ est ~~non~~ positive ou négative, on ne peut rien dire a priori.

Rmq 47 : Si $n = 2$, si $H(f)(x_0)$ est (non définie) positive, on dit que x_0 est un pt selle de f. (annexe 4)

Thm 48 : Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$ (et $0 \in \Omega$). Si $df(0) = 0$ et $d^2 f(0)$ est non dégénérée de signature $(p, n-p)$; alors il existe un $\mathcal{C}^1$-difféo $x \mapsto u = \varphi(x)$ local en 0 tq $\varphi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$

Cor 49 : Si $f \in \mathcal{C}^3(\Omega, \mathbb{R}^2)$, on peut tracer les lignes de niveau de f en fonction de la signature de $d^2 f$. (annexe 5)

Def 50 : Soit $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$. On dit que f est localement (resp. globalement) elliptique si $H(f)(x) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ pour tout $x \in \Omega$ (resp. si de plus il existe $\alpha > 0$ tq la vap minimale de $H(f)(x)$, $\lambda_1(x)$ est tq $\lambda_1(x) \geq \alpha$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$).

Prop 51 : Si f est elliptique sur Ω, elle est strictement convexe. Si de plus $\Omega = \mathbb{R}^n$ et f est globalement elliptique, alors

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad f(y) - f(x) \geq \langle \vec{\nabla} f(x) \mid y - x \rangle + \frac{\alpha \|y - x\|^2}{2}$$

En particulier, f admet un minimum global.

3) Méthodes de descente

Thm 52 : Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ globalement elliptique de minimum global atteint en $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tq $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq f(x_0)\}$ est un compact convexe et soit $D = \max_{x \in K} \|\lambda_n(x)\|$ où $\lambda_n(x)$ est la vap max de $H(f)(x)$. Alors si $a \in \left]0, \frac{2\alpha}{D^2}\right[$, la méthode $x_{k+1} = x_k - a \vec{\nabla} f(x_k)$ converge à vitesse géométrique vers y_0

DVP 2

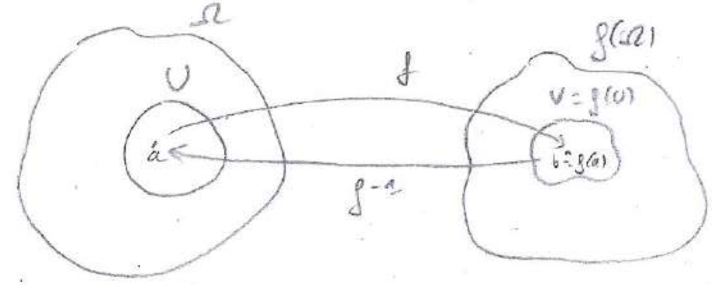
Lemme 53 : (Inégalité de Kantorovitch) Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ de vap $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\frac{\|x\|^4}{\|x\|_A \|x\|_{A^{-1}}} \geq 4 \frac{\lambda_{max} \lambda_{min}}{(\lambda_{max} + \lambda_{min})^2}$

Thm 54 : Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On note $\bar{x}$ solution de $Ax = b$ et $\Phi : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{2}\|x\|_A^2 - {}^t x b$. Alors si

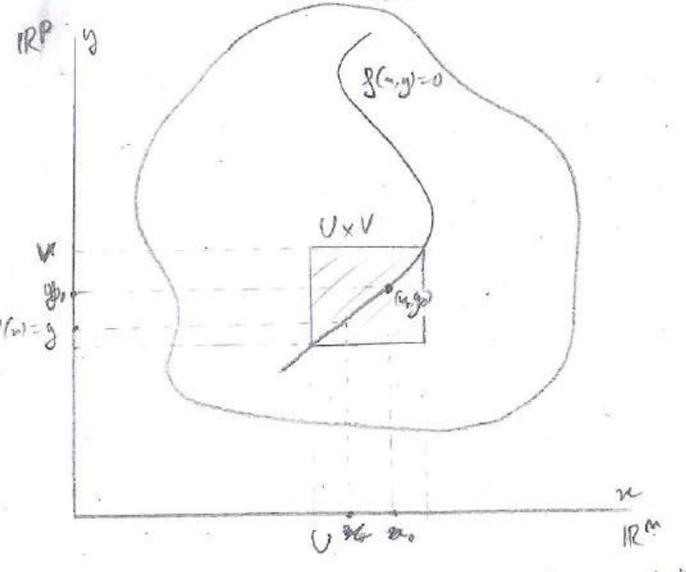
$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{x}\} \\ x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla \Phi(x_k) \end{cases} \text{ où } \alpha_k = \frac{\|\nabla \Phi(x_k)\|^2}{\|\nabla \Phi(x_k)\|_A^2}, \ \forall k \in \mathbb{N},$$

on a $x_k \xrightarrow[k \to \infty]{} \bar{x}$ et $\|x_k - \bar{x}\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}} \left(\frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1}\right)^k \|x_0 - \bar{x}\|$

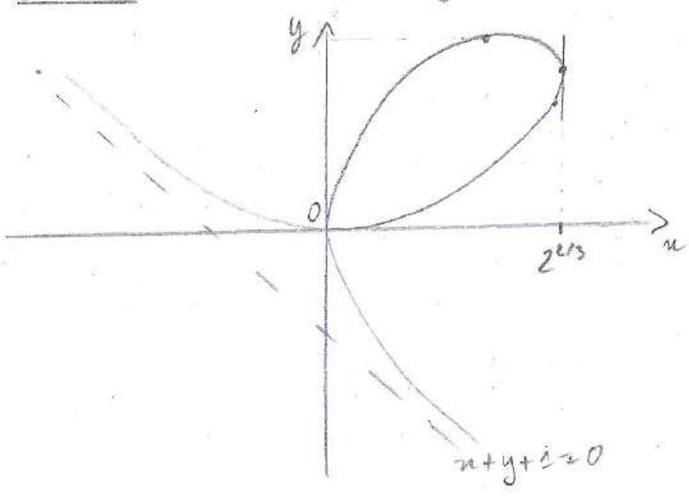
où $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ sont les vap de A.



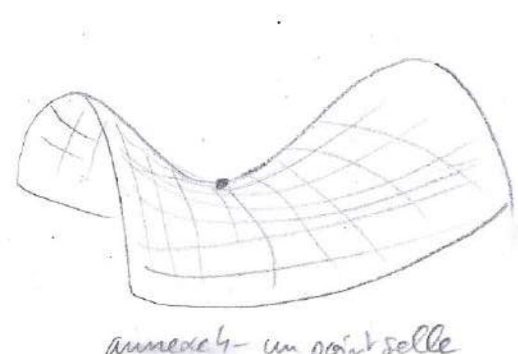
<u>annexe 1</u> - illustration du th. d'inversion locale



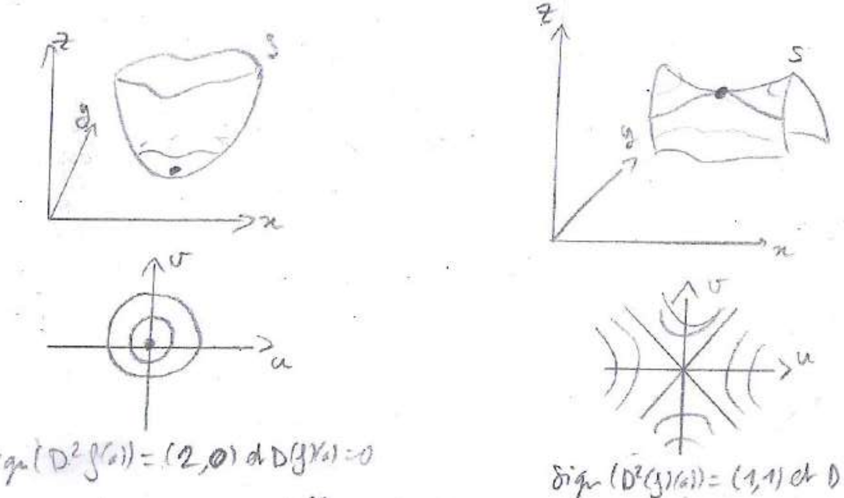
<u>annexe 2</u> - illustration du th. des fonctions implicites



<u>annexe 3</u> - Allure du folium de Descartes $x^3+y^3-3xy=0$



<u>annexe 4</u> - un point selle



$\text{sign}(D^2 f(a)) = (2,0)$ et $D(f)(a) = 0$

$\text{sign}(D^2(f)(a)) = (1,1)$ et $D(f)(a) = 0$

<u>Annexe 5</u> - Allure des lignes de niveau