T.D. 1 - Événements et probabilités.

Exercice 1.

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont égaux entre eux ?

- $A = \{n + 4, n \in \mathbb{N}\}$,
- $B = \{n, n = k + 4, k \in \mathbb{N}\}$,
- $C = \{n, n + 4 \in \mathbb{N}\}$,
- $D = \{n, n \in \mathbb{N}, n \leq 4\}$,
- $E = \{n, n \in \mathbb{N}, n \geq 4\}$,
- $F = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Exercice 2.

Remplir les espaces avec l'un des symboles $\in$, $\subset$, $=$ lorsque c'est possible :

- $\{3, 5\} \subset \mathbb{N}$
- $(3, 5) \in \{(3, 5)\}$
- $(3, 5)\ \emptyset\ \{5, 3\}$
- $(3, 5) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$
- $(3, 5) \neq (5, 3)$
- $\{3, 5\} = \{5, 3\}$
- $\{3, 5\} \subset \{4, 5, 3\}$
- $\{3, 5\} \in \mathcal{P}(\{4, 5, 3\})$

Exercice 3.

A, B, C sont trois événements d'un espace d'épreuves Ω. Exprimer à l'aide de A, B, C l'événement E suivant :

1. $E =$ « A, B, C se produisent simultanément ».
2. $E =$ « Au moins un des trois événements se produit ».
3. $E =$ « Parmi A, B, C, seul C se produit ».
4. $E =$ « Aucun des trois événements ne se produit ».
5. $E =$ « A ou B se réalise mais pas ensemble ».
6. $E =$ « Un seul de ces trois événements se produit ».
7. $E =$ « Deux et pas plus de deux, se produisent ».
8. $E =$ « Pas plus de deux se produisent ».

Indication : Utiliser les symboles $\cup$ et $\cap$. On pourra aussi utiliser les complémentaires A^c, B^c et C^c. Par exemple, pour la 3 : $E = A^c \cap B^c \cap C$.

Exercice 4.

Dans un scrutin où s'affrontent les candidats A et B, N votes sont émis. L'épreuve consiste à dépouiller le scrutin en ouvrant successivement les N bulletins. On définit les événements suivants, quand n bulletins ont été dépouillés

— C_n : « Le candidat A a le plus de votes au bulletin n »
— D_n : « Le candidat A a le plus de votes du bulletin n jusqu'au bulletin N »
— E_n : « Le candidat A a le plus de votes du bulletin n jusqu'au bulletin N, après une égalité au bulletin $n - 1$ »

1. Donner une relation d'inclusion entre C_n, D_n et E_n.
2. Exprimer D_n en fonction des C_k. Définir les complémentaires de C_n et D_n.
3. Donner une relation liant C_N, D_N et les E_k.

Indication : Pour la question 2, on pourra penser à une intersection.

Exercice 5.

Deux amis jouent au jeu suivant : ils jettent deux dés à 6 faces, et parient sur la somme des deux résultats. L'un des deux parie sur 5, l'autre sur 7.

1. Lequel a le plus de chances de gagner ?
2. Admettons qu'ils mettent en jeu des sommes différentes, et que le premier mette 10 euros. Chaque joueur récupère sa mise en cas d'égalité. Combien l'autre doit mettre en jeu pour que le jeu paraisse « équitable » ?

Indication : Pour les deux questions, on pourra détailler l'univers Ω de l'expérience considérée. En particulier, on pourra dénombrer le nombre de configurations pour une même issue de l'expérience.

Exercice 6.

Un sac contient 4 billes rouges, 3 billes jaunes et 3 billes vertes. On tire au hasard d'un seul coup trois billes dans le sac.

1. Quelle est le nombre total d'issues possible ?
2. Quelle est la probabilité de tirer trois billes rouges ?

Indication : On tirera grandement profit de l'univers Ω choisi pour décrire l'expérience.

Exercice 7.

Quatre lampes sont susceptibles de s'allumer simultanément. Chaque configuration est équiprobable.

1. Quelle est la probabilité qu'une seule lampe soit allumée.
2. On suppose désormais qu'il est impossible qu'il y ait trois lampes exactement allumées en même temps. Quelle est la probabilité que deux lampes exactement soit allumées ?

Indication : Décrire toutes les issues des expériences considérées.

Exercice 8.

1. Soit A et B deux événements. Montrer que la probabilité qu'au moins un des deux se produise est
$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$
2. Même question en considérant 3 événements A, B et C.

Indication : Pour la première question, cf la démonstration du cours. Pour la deuxième, utiliser avec profit la première question en considérant les événements $A \cup B$ et C.

Exercice 9.

Selon une étude de 1999, 23% des ménages étaient équipés d'un ordinateur et 28% d'un téléphone portable. Ils étaient 73% n'avoir ni ordinateur ni téléphone portable. Pourquoi cette étude est nécessairement fausse ?

Exercice 10.

En étudiant une population, on a remarqué que, durant un mois, 40% des individus sont allés au cinéma, 25% sont allés au théâtre, et $12,5\%$ sont allés au cinéma et au théâtre. On considère une personne tirée au hasard parmi cette population et on note les événements suivants :

- $C =$ « elle est allée au cinéma »,
- $T =$ « elle est allée au théâtre ».

Calculer la probabilité que cette personne

1. soit allée au cinéma ou au théâtre.
2. ne soit pas allée au cinéma.
3. ne soit allée ni au cinéma ni au théâtre.
4. soit allée au cinéma mais pas au théâtre.

Indication : On pourra calculer à l'aide des formules du cours : $\mathbb{P}(C \cup T)$, $\mathbb{P}(C^c)$, $\mathbb{P}(C^c \cap T^c)$, $\mathbb{P}(C \cap T^c)$. On pourra utiliser la règle de De Morgan pour la troisième probabilité à calculer.

Exercice 11.

On a mené à Paris une étude sur les trois moyens de locomotion métro, voiture et vélib. Les conclusions sont les suivantes :

1. deux tiers des habitants utilisent au moins le métro pour se déplacer,
2. deux tiers utilisent au moins la voiture,
3. deux tiers utilisent au moins le vélib,
4. les trois quarts utilisent deux moyens différents,
5. personne n'utilise les trois.

Décrire la situation en notant chaque événement en jeu puis dessiner le diagramme ensembliste correspondant. Calculer la probabilité qu'un habitant tiré au hasard utilise au moins un des trois moyens de locomotion cités. En déduire que les conclusions de l'étude sont fausses.

Indication : Pour la probabilité qu'un habitant tiré au hasard utilise au moins un des trois moyens de locomotion, on pourra utiliser la formule de la question 2 de l'exercice 8.