T.D. 3 - Indépendance d'événements, variables aléatoires

Exercice 1.

Une auto-école présente le même jour trois candidats au permis : André, Denis et Nicole. Sur la base des performances précédentes, le directeur estime les probabilités de succès : pour André 0 :7, pour Denis 0 :5, pour Nicole 0 :9. Quelles sont les probabilités des événements B, R, E, P ?

Indication : On notera A l'événement "André réussit", D l'événement "Denis réussit" et N l'événement "Nicole réussit". On écrira ensuite B, R, E et P en fonction de A, D, N. Par exemple, on a $B = D \cap A^c \cap N^c$.

Exercice 2.

Jean s'habille très vite le matin et prend au hasard un pantalon, un tee-shirt, une paire de chaussettes. Il y a dans son armoire 5 pantalons dont 2 noirs, 6 tee-shirts dont 4 noirs, et 8 paires de chaussettes dont 5 paires noires.

Indication : On notera P l'événement "Jean prend un pantalon noir", T l'événement "Jean prend un tee-shirt noir" et C l'événement "Jean prend une paire de chaussette noire". On calculera donc la probabilité de $P \cap T \cap C$ d'une part et la probabilité de $(P \cap T^c \cap C^c) \cup (P^c \cap T \cap C^c) \cup (P^c \cap T^c \cap C)$ d'autre part.

Exercice 3.

Trois étudiants x, y et z attendent dans une file à la porte du secrétariat. On considère les deux événements — A : “y attend derrière x ”
— B : “z attend derrière x”
(“derrière” ne veut pas forcément dire “juste derrière”).
On suppose qu'il y a équiprobabilité sur l'ordre d'arrivée des étudiants. Les événements A et B sont-ils indépendants ? On commencera par déterminer l'univers.
Indication : On pourra prendre l'univers $\Omega = \{(x, y, z), (x, z, x), (y, x, z), (y, z, x), (z, x, y), (z, y, x)\}$. On calculera d'une part $\mathbb{P}(A \cap B)$ et d'autre part $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Exercice 4.

Un couple a deux enfants. 1. Les événements A = "Ce couple a au moins un fils" et B = "Ce couple a au moins une fille" sont-ils indépendants ? 2. On suppose que l'un des deux enfants est une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un fils ? 3. Est-ce que cette probabilité change si on nous apprend que l'aînée est née un mardi ?

Indication : On pourra commencer à tracer un arbre de probabilité correspondant aux issues des deux enfants. Enfin on calculera d'une part $\mathbb{P}(A \cap B)$ et d'autre part $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. On calculera aussi la probabilité d'avoir un fils sachant qu'on a déjà obtenu une fille.

Exercice 5.

Dans la mémoire d'un ordinateur, on appelle quartet un ensemble de 4 bits (prenant chacun la valeur 0 ou 1). On suppose que la mémoire de l'ordinateur n'a pas été initialisée. Ainsi, tous les bits de la mémoire se trouvent, indépendamment, dans l'état 1 avec probabilité $p \in [0, 1]$. On considère un quartet pris au hasard et on note X le nombre entier dont ce quartet est l'écriture en base 2. 1. Quelles valeurs peut prendre X ? 2. Calculer la probabilité que X soit impair puis $\mathbb{P}(X > 3)$.

Indication : On code sur un exemple : $(1, 1, 0, 1) \mapsto (1 \times 2^0) + (0 \times 2^1) + (1 \times 2^2) + (1 \times 2^3) = 13$.
1. On trouvera que $X(\Omega) = [\![0, 15]\!]$, pour cela on explicitera X comme une fonction $X : \Omega \to \mathbb{N}$ en ayant posé $\Omega := \{(a_3, a_2, a_1, a_0) \mid a_i \in \{0, 1\}\}$
2. On notera que $X((a_3, a_2, a_1, a_0))$ est impair si et seulement si $a_0 = 1$.
Puis on remarquera que $X((a_3, a_2, a_1, a_0)) > 3$ si et seulement si $a_3 = 1$ ou $a_2 = 1$.

Exercice 6.

On lance une fois deux dés non pipés. Soit X la variable aléatoire égale au résultat du premier dé. Soit Y la variable aléatoire égale au résultat de la somme des deux dés. On pose $Z = (X-3)^2$ et $W = Y^2$.

Indication : 1. On pourra commencer par décrire le support de W en remplaçant X par chaque entier de 1 à 6. On calculera ensuite $\mathbb{P}(W = k)$ pour tout k dans le support afin de décrire la loi de W.
2. On procédera de manière analogue.

Exercice 7.

Un fabricant d'ordinateurs importe des claviers de trois pays A, B et C, dans des proportions respectives $p_A = 0,3$, $p_B = 0,25$ et $p_C = 0,45$. Selon sa provenance, la probabilité qu'un clavier soit défectueux est, respectivement, de $q_A = 0,05$, $q_B = 0,08$ et $q_C = 0,09$.

Indication : On procédera comme dans les TD précédents avec les probabilités conditionnelles, en pouvant s'aider (ou non) d'un arbre de probabilités.

Exercice 8.

On lance une fois un dé non pipé. 1. On suppose qu'on reçoit 15 euros si on obtient 1, rien si on obtient 2,3 ou 4, et 6 euros si on obtient 5 ou 6. Soit G la variable aléatoire égale au gain de ce jeu. Quelle est la loi de G ? Que vaut le gain moyen ? 2. Mêmes questions en supposant qu'on gagne 27 euros pour un 1 et rien sinon. Préférez vous jouer au jeu du 1) ou à celui-ci ?

Indication : 1. On remarquera donc que $G(\Omega) = \{0, 6, 15\}$, pour établir la loi de G on calculera successivement $\mathbb{P}(G = 0), \mathbb{P}(G = 6)$ et $\mathbb{P}(G = 15)$.
2. De même avec $G(\Omega) = \{0, 27\}$ et les calculs de $\mathbb{P}(G = 0)$ puis $\mathbb{P}(G = 27)$.

Exercice 9.

On considère un sac contenant deux boules rouges et quatre boules noires, indiscernables au toucher. 1) On tire successivement une boule, avec remise, jusqu'à obtenir une boule rouge. On note X son rang d'apparition. Déterminer la loi de ce rang. 2) On tire successivement une boule, sans remise, jusqu'à obtenir une boule rouge, et on note X son rang d'apparition. Déterminer la loi de ce rang.

Indication : Dans le cas 1) on remarquera une loi géométrique dont on déterminera le paramètre. Dans le cas 2) il s'agira de calculer $\mathbb{P}(X = k)$ pour tous les rangs possibles d'apparition.

Exercice 10.

Les étudiants d'un cours de probabilités sont répartis en trois groupes pour les séances d'exercices, comprenant respectivement 25, 30 et 35 étudiants. On choisit au hasard un étudiant du cours et on note X le nombre d'étudiants de son groupe. Calculer la loi et l'espérance de X. Cette espérance est-elle égale à la moyenne du nombre d'étudiants par groupe ?

Indication : On remarquera que le support est $X(\Omega) = \{25, 30, 35\}$. La moyenne du nombre d'étudiants par groupe est $\frac{25+30+35}{3} = 30$, et on trouvera une espérance différente de la moyenne.