T.D. 4 - Lois discrètes

Exercice 1.

Dans tous les cas suivants, identifier une loi de variable aléatoire qui peut représenter le phénomène aléatoire décrit, et proposer des paramètres : 1. Le nombre de personnes se connectant à un site web sur une journée 2. Sur 100 étudiants français choisis au hasard, le nombre d'entre eux qui font des études d'informatique 3. Le nombre d'années avant le prochain tremblement de terre à Paris 4. Le nombre de pays où il y aura un tremblement de terre l'année prochaine 5. Le nombre de requêtes arrivant à un serveur en une heure 6. Le nombre de tentatives avant de gagner à Pierre-feuille-ciseaux

Indication : Les lois qu'il faudra trouver font parties des lois usuelles vues en cours : binomiale, géométrique, Poisson. Pour s'aider on pourra tout d'abord décrire le support de la variable aléatoire choisie pour la modélisation. Par exemple pour la 6 : On peut prendre $X(\Omega) = [\![1, +\infty[\![$ et l'on trouve une loi géométrique.

Exercice 2.

Soit $p \in]0, 1[$ et X une variable aléatoire dont la loi est donnée dans le tableau. 1. Donner la loi de X et ses paramètres. 2. Quelle est la loi de la variable aléatoire $4 - X$? 3. On s'intéresse aux familles de quatre enfants. En supposant les naissances indépendantes et l'équiprobabilité garçon/fille, quelle est la loi du nombre de filles ? 4. Quelle est la probabilité d'avoir des enfants des deux sexes ? Celle de n'avoir que des filles ou que des garçons ?

Indication : Pour la question 1 on reconnaîtra une loi usuelle du cours. Pour la question 2, on calculera $\mathbb{P}(4 - X = k)$ pour $k \in [\![0, 4]\!]$. Pour la question 3, on reconnaîtra à nouveau une loi usuelle. Pour la question 4, on calculera les probabilités des événements $\{Y = 0\}$ et $\{Y = 4\}$ pour la variable aléatoire Y choisie en question 3.

Exercice 3.

Une compagnie de transports possède $n = 15$ cars, tous en état de marche en début de journée. La probabilité pour qu'un car tombe en panne un tel jour est $p = 0,1$. 1. Soit X le nombre de cars tombant en panne ce jour. Quelle est la loi de probabilité de X, et sa moyenne ? 2. Un car tombé en panne sera reparé dans la journée si un réparateur est libre, la réparation prenant le reste de la journée. Sachant que la compagnie emploie 2 réparateurs, quelle est la probabilité pour que tous les cars soient en état de marche le lendemain matin ?

Indication : Pour la question 1 on reconnaîtra une loi usuelle du cours. Pour la question 2, on regardera la probabilité de l'événement $\{X = 0\} \cup \{X = 1\} \cup \{X = 2\}$.

Exercice 4.

On pense que la probabilité qu'un bon système d'exploitation tombe en panne durant une journée d'utilisation est $p = 0,01$. Quel est le nombre de jours á partir duquel la probabilité d'observer au moins une panne du système soit supérieure ou égale à $1/2$?

Indication : On prendra X la variable aléatoire correspondant au nombre de jours avant la première panne. X suit une loi géométrique de paramètre p. Puis on déterminera le plus petit n tel que :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{X = k\}\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = k) \geq 1/2$$

Exercice 5.

Une usine fabrique des écrous. La probabilité qu'un écrou soit défectueux est $p = 0,0015$. 1. Quelle est la probabilité qu'une boîte de 100 écrous contienne au moins un écrou défectueux ? On donnera une estimation sans faire beaucoup de calculs, en faisant des développements limités à l'ordre 1 lorsque nécessaire. 2. On examine

5 boîtes de 100 écrous prises au hasard en sortie d'usine. Quelle est la probabilité qu'au moins une d'entre elles contienne au moins un écrou défectueux ?

Indication : On identifiera une loi binomiale et on utilisera le développement usuel à l'ordre 1 :

$$(1+x)^{\alpha} =_{x\simeq 0} 1 + \alpha x + o(x)$$

Exercice 6.

On lance un dé équilibré. Soit X le nombre de jets nécessaires pour obtenir deux fois un 6. Déterminer l'espérance de X et sa variance.

Indication : On pourra considérer deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes et identiquement distribuées d'une loi géométrique de paramètre $p = 1/6$. Et on pourra écrire $X = X_1 + X_2$ dont on déterminera la loi en calculant $\mathbb{P}(X = k) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X_1 = i)\mathbb{P}(X_2 = k - i)$. On trouvera une loi binomiale négative $\mathcal{NB}(2, p)$.

Exercice 7.

On lance deux pièces, appelées 1 et 2, plusieurs fois simultanément. On suppose que la pièce 1 est équilibrée, et la 2 est biaisée : elle a une probabilité $p \in]0, 1[$ de faire pile. 1. On appelle X_i le nombres de lancers nécessaires pour que i fasse pile. Quelle est la loi de X_1 ? De X_2 ? 2. On appelle X le nombre de lancers nécessaires pour que l'une ou l'autre des pièces fasse pile. Montrer que $X = \min(X1; X2)$. En déduire $\mathbb{P}(X > n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, et donner la loi de X. Aurait-on pu le trouver d'une autre façon ? 3. Soit U, V deux variables géométriques indépendantes de paramètres p et q. Quelle est la loi de $T = \min(U; V)$?

Indication : On remarquera des lois géométriques de paramètres p ou $1/2$. Pour le calcul de $\mathbb{P}(X > n)$ on notera que :

$$\mathbb{P}(X > n) = \mathbb{P}(\min(X1; X2) > n) = \mathbb{P}(X_1 > n, X_2 > n)$$

Exercice 8.

1. Un pêcheur pêche dans un lac. On suppose qu'il pêche en moyenne $2,5$ poissons par heure. Par quelle variable aléatoire peut-on modéliser le nombre X de poissons attrapés en une heure ? 2. Dans ce lac, il y a 40 % de brochets, et 60 % de carpes, aussi faciles à attraper l'un que l'autre. Sachant que le pêcheur a attrapé n poissons, quelle est la loi du nombre Y de carpes qu'il a attrapées ? 3. On ne suppose plus qu'on connaît le nombre total de poissons attrapés. Donner la loi de Y sans calcul. 4. Soit Z une variable qui vérifie pour $0 \leq k \leq n$: $\mathbb{P}(Z = k \mid X = n) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ on dit que conditionnellement à X, Z a la loi $B(X; p)$. Expliquer pourquoi Z a la même loi que Y (aucun calcul n'est demandé). 5. Le nombre d'étudiants qui arrive à la fac chaque année suit une loi de Poisson de paramètre μ. Une proportion q de ces étudiants ressortira avec un diplôme, où $q \in (0, 1)$. Quelle est la loi du nombre d'étudiants qui ressortiront diplômés de cette université.

Indication : On remarquera une loi usuelle pour la question 1 dont on précisera le paramètre grâce à sa moyenne. On reconnaîtra des binomiales notamment dans les questions suivantes.

Exercice 9.

Dans la mémoire d'un ordinateur il se peut que certains "bit" enregistrés soient inexacts. Cependant il est plus fréquent de voir apparaître un 0 à la place d'un 1 que le contraire. Soit X_0 le nombre de faux 0 et X_1 le nombre de faux 1. On suppose ces variables indépendantes et de loi de Poisson de paramètres respectifs λ_0 et λ_1. 1. Quelle est la loi du nombre total d'erreurs ? 2. Soit $n > 1$. On suppose que n erreurs ont été commises. Soit X le nombre de faux 0. Quelle est la loi de X ?

Indication : On trouvera pour la première question une loi de Poisson de paramètre $\lambda_0 + \lambda_1$. Pour la deuxième question on raisonnera comme dans l'exercice précédent.

Exercice 10.

Dans un bureau de poste, il y a 10 guichets. En une journée, le nombre de clients qui se présentent à ce bureau de poste est une v.a. X, de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose que les clients choisissent au hasard un guichet, de façon indépendante. Soit Y le nombre de clients qui choisissent le guichet 1. 1. Soit $n > 1$. On suppose que $X = n$. Dans ce cas, quelle loi suit la variable Y ? 2. En déduire la loi de Y et calculer $\mathbb{E}(Y)$ (On ne suppose plus X = n).

Indication : On raisonnera de manière analogue à l'exercice 8. On pourra utiliser en particulier :

$$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{n \geq 1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k | X = n)\mathbb{P}(X = n)$$